文章编号：1004-4353(2014)01-0020-05

稀疏网格配置法在随机 Burgers'方程中的应用

蔡国宪[1]，李炯天[1]，朴光日[2]，金元峰[2]
(1. 韩国亚洲大学 数学系，水原 443-749；2. 延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要：研究了稀疏网格配置法在随机 Burgers'方程中的应用. 首先介绍了随机配置方法，并在此基础上引入了稀疏网格配置法，最后通过数值计算结果比较了稀疏网格配置法和蒙特卡罗方法，进而验证了稀疏网格配置法应用于随机 Burgers'方程时的可行性和有效性.

关键词：随机配置方法；稀疏网格配置法；随机 Burgers'方程
中图分类号：O242.21　　　**文献标识码**：A

Application of the sparse-grid stochastic collocation method to the stochastic Burgers' equation

CAI Guoxian[1]，LEE Hyungchun[1]，PIAO Guangri[2]，JIN Yuanfeng[2]
(1. *Department of Mathematics*, *Ajou University*, *Suwon* 443-749, *Korea*;
2. *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: We study an application of the sparse-grid stochastic collocation method to the stochastic Burgers' equation. For this work, stochastic collocation and sparse-grid technique are applied to the problem. To verify an effectiveness and availability of those methods for the stochastic Burgers' equation, we provide several numerical experiments.

Key words: stochastic collocation method; sparse-grid collocation method; stochastic Burgers' equation

许多物理问题存在各种不确定性，其中的量化不确定性包括动荡、气候学、湍流燃烧、多孔介质流和流体力学等领域. 不确定性的数值模拟对研究随机微分方程具有重要意义，其研究方法一般采用蒙特卡罗方法和随机 Galerkin 方法，然而这两种方法在模拟多维的随机非线性方程时需解决大量成本的问题；因此，提高计算精度和效率对研究更多的随机非线性方程问题有着重要意义. 本文利用蒙特卡罗方法和随机稀疏网格配置法对随机 Burgers'方程进行考察，验证了随机稀疏网格配置法在计算效率和精度上的优势.

1　随机配置方法

定义 1　$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$ 为概率空间，其中 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为样本空间 Ω 子集上的 σ-代数，$\mathscr{P}$ 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度.

定义 2　区间 (a,b) 上的随机变量的概率测度定义为 $\mathscr{P}(\eta\in(a,b))=\mathscr{P}(\{Z:Z\in A=\eta^{-1}(a,b)\})$；累积分布函数定义为 $\mathscr{F}_\eta(z)=\mathscr{P}(\{\omega:\eta(\omega)\leqslant z\})=\mathscr{P}(\eta\leqslant z)$，这里 $\mathscr{F}_\eta(-\infty)=0$，$\mathscr{F}_\eta(\infty)=1$，并且满

收稿日期：2013-11-26
作者简介：蔡国宪(1977—)，男，讲师，研究方向为计算数学.

足 $\mathscr{P}_\eta(z)=\mathscr{F}_\eta'(z)$.

考虑对于随机变量 $\eta:\Omega\to\mathbf{R}$ 的确定函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 显然, f 满足 $f(\omega)=f(\eta(\omega))$.

$$\mathbf{E}[f]=\int_{\mathbf{R}}f(\eta)\mathrm{d}\mathscr{F}_\eta(\eta),\ \mathbf{V}\mathrm{ar}[\mathrm{f}]=\mathbf{E}[(f(\eta)-\mathbf{E}[f])^2]=\int_{\mathbf{R}}(g(\eta)-\mathbf{E}[f])^2\mathrm{d}\mathscr{F}_\eta(\eta).$$

定理 1[1]　连续随机变量 z 的概率密度函数 $f_z:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足下列性质:① $f_z(z)\geqslant 0,\forall z\in\mathbf{R}$; ② $f_z(z)$ 为分段连续; ③ $\int_{-\infty}^{\infty}f_z(z)\mathrm{d}z=1$; ④ 对于 $a,b\in\mathbf{R}$ 以及 $a<b$, 满足 $\mathscr{P}(a<z<b)=\int_a^b f_z(z)\mathrm{d}z$.

已知均匀分布 $U(a,b)$ 在区间 (a,b) 的概率密度函数为 $f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},\ z\in(a,b);\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$ 用 $u_{h,p}(z;x,t)$ 表示如下随机 Burgers' 方程的有限元离散解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u(z;x,t)+u(z;x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(z;x,t)=\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(z;x,t);$$

$$u(z;0,t)=a(z;t),\quad u(z;1,t)=b(z;t),\quad u(z;x)=c(z;x).$$

为了求时间和空间点对于概率空间的平均和方差,首先利用一维 Lagrange 内插式得出关系式(1):

$$\mathscr{I}u_{h,p}(z;x,t)\approx\sum_{i=1}^{M}u_{h,p}(z^i;x,t)L(z)=\sum_{i=1}^{M}u_{h,p}(z^i;x,t)\prod_{i=1,i\neq j}^{M}\frac{z-z^i}{z^j-z^i},\tag{1}$$

这里 M 为配置点的个数. 利用(1)式可以得出如下的一维随机函数 $u_{h,p}(z;x,t)$ 在概率空间上的平均和方差的近似值:

$$\mathbf{E}[u_{h,p}(z;x,t)]=\bar{u}_{h,p}(z;x,t)\approx\sum_{k=1}^{M}u_{h,p}(z^k;x,t)\int_\Gamma L(z)\rho(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{M}u_{h,p}(z^i;x,t)\omega_i,\tag{2}$$

$$\mathbf{V}\mathrm{ar}[u_{h,p}(z;x,t)]\approx\sum_{i=1}^{M}[u_{h,p}(z^i;x,t)-\bar{u}_{h,p}(z;x,t)]^2\int_\Gamma L(z)\rho(z)\mathrm{d}z=$$

$$\sum_{i=1}^{M}[u_{h,p}(z^i;x,t)-\bar{u}_{h,p}(z;x,t)]^2\omega_i,\tag{3}$$

其中 ω_i 表示对应的 Gauss 积分点 z^i 的权重.

2　全张量积(TP)插值法

与多维概率空间 $\boldsymbol{z}(\xi)=[z_1(\xi),z_2(\xi),\cdots,z_N(\xi)]$ 相对应的联合概率密度函数表示为 $\rho:\Gamma^N\to\mathbf{R}_+$, $\rho\in L^\infty(\Gamma^N)$. 用 $\{z_k^1,z_k^2,\cdots,z_k^{k(i_n)}\}$ 表示 z_k 方向的 $k(i_n)$ 个配置点集合,用 U_k 表示 z_k 方向的 $k(i_n)$ 个配置点的内插式[2-3],则有:

$$\boldsymbol{U}_k[u_{h,p}(z_k;x,t)]=\sum_{i=1}^{k(i_n)}u_{h,p}(z_k^i;x,t)L_k^{k(i_n)}(z_k),\ \{z_k^1,\cdots,z_k^{k(i_n)}\}\in\Gamma_k;$$

$$\boldsymbol{U}_k:C^0(\Gamma_k)\to\mathscr{P}_{k(i_n)-1}(\Gamma_k)=\mathrm{span}\{z_k^1,z_k^2,\cdots,z_k^{k(i_n)}\},\ k=1,\cdots,k(i_n).$$

上式中 z_k 方向的多项式次数为 $k(i_n)-1$.

用 $u_{h,p}(\boldsymbol{z};x,t)=\bigotimes_{i=1}^{N}\boldsymbol{U}_i^{k(i_n)}[u_{h,p}(\boldsymbol{z};x,t)]$ 表示全张量积随机配置逼近,其中 $\otimes$ 表示张量计算. 利用一维的 Lagrange 插值法可以得到如下 N 维的全张量积的 Lagrange 内插式:

$$\mathscr{I}^N u_{h,p}(z;x,t)\approx\boldsymbol{U}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{U}_N=\sum_{j_1=1}^{k(i_1)}\cdots\sum_{j_N=1}^{k(i_N)}u_{h,p}(z_1^{j_1},\cdots,z_N^{j_N};x,t)\cdot(L_1^{k(i_1)}\otimes\cdots\otimes L_N^{k(i_N)})=$$

$$\sum_{j_1=1}^{k(i_1)}\cdots\sum_{j_N=1}^{k(i_N)}u_{h,p}(z_1^{j_1},\cdots,z_N^{j_N};x,t)\cdot\prod_{k=1}^{N}\prod_{s=1,s\neq h_n}^{k(i_n)}\frac{z_k-z_k^s}{z_k^{h_n}-z_k^s},\ n=1,\cdots,N.\tag{4}$$

3 稀疏网格配置法

稀疏网格配置方法是由俄罗斯数学家 Smolyak[4] 于 1963 年提出的,它是一种多变量问题的数值离散方法,可有效求解多维积分[3-6].

首先考虑一维的 Gauss 积分 $Q_l^{(i)}g := \sum_{j=1}^{m_l^i} g(x_{lj})\omega_{lj}$. 定义嵌套式为

$$\Delta_l^{i(n)}g = (Q_l^{i(n)} - Q_{l-1}^{i(n)})g,\ Q_0^1 g = 0. \tag{5}$$

嵌套式 $\Delta_l^{i(k)}g$ 的求积分权重是对应的 $Q_l^{i(k)}g$ 配置点 l 和 $l-1$ 级权重之差.

对于 d 维的函数 g, Smolyak's 方法可由式子

$$Q_l^{(d)}g = \sum_{|\boldsymbol{k}|_1 \leqslant l+d-1} (\Delta_{k_1}^{i(1)} \otimes \cdots \otimes \Delta_{k_d}^{i(d)})g \tag{6}$$

得到,其中 $l \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}^d$.

由(6)式可得出全张量积稀疏网格配置式:

$$(Q_{l_1}^{i(1)} \otimes \cdots \otimes Q_{l_d}^{i(d)})g = \sum_{j_1=1}^{n_{l_1}^1} \cdots \sum_{j_d=1}^{n_{l_d}^1} \omega_{l_1 i_1} \cdots \omega_{l_d i_d} g(x_{l_1 i_1}, \cdots, x_{l_d i_d}) =$$

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{1 \leqslant k_j \leqslant l} (\Delta_{k_1}^{i(1)} \otimes \cdots \otimes \Delta_{k_d}^{i(d)})g, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 满足 $|\boldsymbol{k}|_\infty = \max\{k_j\} \leqslant l$ 和 $|\boldsymbol{k}|_1 \leqslant l+d-1$. 利用(5)式和(6)式可得出[7-8]:

$$Q_l^{(d)}g = \sum_{|\boldsymbol{k}|_1 \leqslant l+d-1} (-1)^{l+d-|\boldsymbol{k}|_1-1} \begin{pmatrix} d-1 \\ |\boldsymbol{k}|_1 - l \end{pmatrix} (Q_{k_1}^{i(1)} \otimes \cdots \otimes Q_{k_d}^{i(d)})g = \sum_{k=1}^{l-1} (\Delta_k^{i(1)} \otimes Q_{l-k}^{i(d-1)})g,$$

$$Q_{l+1}^{d+1}g = \sum_{|\boldsymbol{k}|_1 \leqslant l+d-1} (\Delta_{k_1}^{i(1)} \otimes \cdots \otimes \Delta_{k_d}^{i(d)} \otimes Q_{l+d-|\boldsymbol{k}|_1}^{i(d)})g.$$

图 1 和图 2 是用 Clenshaw-Curtis 方法[9] 得到的全张量积(TP)插值法和稀疏网格配置法的二维配置点.

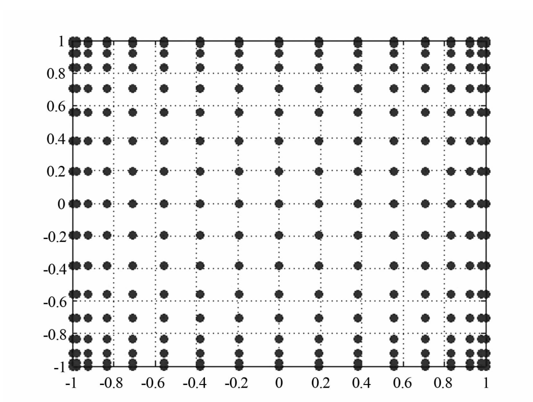

图 1 全张量积插值配置点

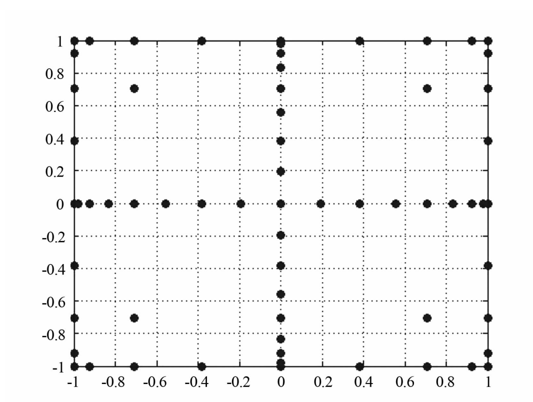

图 2 嵌套式稀疏网格配置点

4 实验结果

本文考虑如下的随机 Burgers' 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\xi;x,t) + u(\xi;x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(\xi;x,t) = \upsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(\xi;x,t);$$

$$u(\xi;0,t) = 1 + 0.2\xi_1,\ u(\xi;1,t) = -1 - 0.2\xi_2,\ u(\xi;1,0) = -2 - 0.2(\xi_1 + \xi_2)x + 1 + 0.2\xi_1,$$

$$\upsilon = 0.01,\ \Delta t = 0.1,\ \Delta x = 1/80,\ T = 1,\ \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{U}(0,1). \tag{8}$$

利用二维随机变量的稀疏网格配置法计算(8)式解的均值和方差. 图 3 和图 4 是在时间 $T=1$ 时(8)式解的均值和方差，其中 L2、L4 和 L6 分别表示稀疏网格配置法的级别. 图 5 是 x 轴采样点和 y 轴误差的关系，其中‘＋——＋’折线显示蒙特卡罗方法的采样点与解的收敛关系，‘0——0’折线显示蒙特卡罗方法取 10^4 个采样点时的解与稀疏网格配置法在不同级别解的关系，‘△——△’折线显示稀疏网格配置法在临近的级别之间误差的减少趋势.

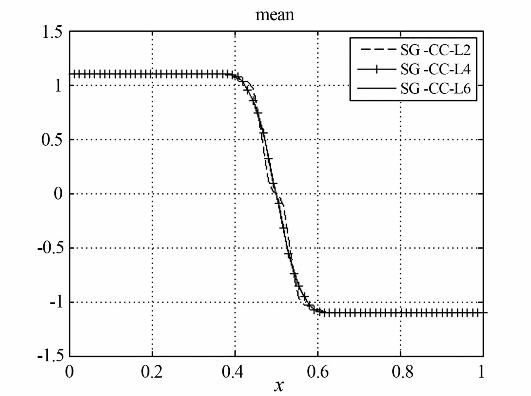

图 3　时间 $T=1$ 时(8)式解的平均

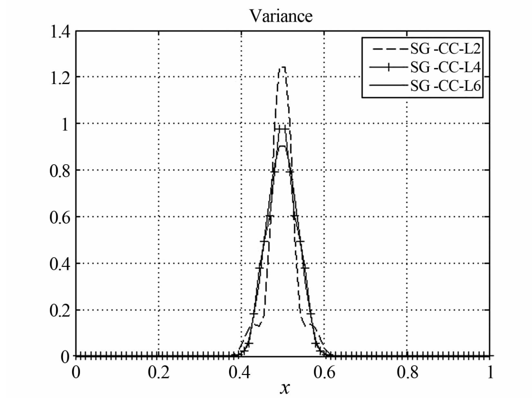

图 4　时间 $T=1$ 时(8)式解的方差

实验结果(图 5)表明：在计算精度上，稀疏网格配置法的收敛速度明显优于蒙特卡罗方法，因此可以说明稀疏网格配置法在求解随机 Burger’s 方程方面具有可行性. 表 1 和表 2 中给出的是用蒙特卡罗方法和稀疏网格配置法的计算时间(所用计算机为 win7，Intel i7 2.93 GHz，8 GB 内存). 由表 1 和表 2 可以看出，蒙特卡罗方法取 10 000 个采样点时需要 722 s，而稀疏网格配置法到第 6 个级别只需要 23 s. 从图 3 和图 4 可以看出，稀疏网格配置法在第 6 个级别已经很接近蒙特卡罗方法取 10 000 个采样点时的结果. 由此表明，嵌套式稀疏网络配置法的计算精度以及计算效率比蒙特卡罗方法有很大的提高.

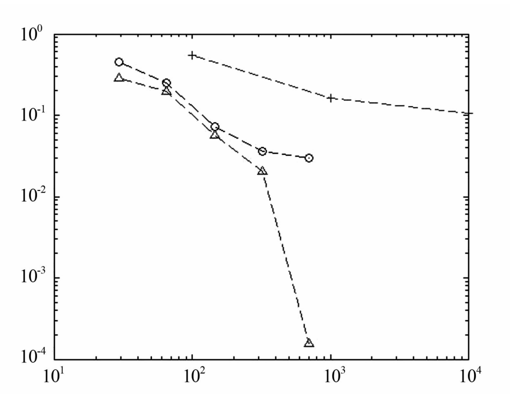

图 5　误差的比较

表 1　蒙特卡罗方法的计算时间

编号	10	100	1 000	10 000	100 000
时间/s	1.78	14.26	71.81	722.32	7 219.52

表 2　嵌套式稀疏网格配置法的计算时间

	SG-CC-L2	SG-CC-L3	SG-CC-L4	SG-CC-L5	SG-CC-L6	SG-CC-L7
编号	13	29	65	145	321	705
时间/s	1.17	2.28	4.83	10.52	23.16	99.75

参考文献：

[1] Breiman L. Probability[M]. Boston：Addison-Wesley，1968.

[2] Babuska I M，Nobile F，Tempone R. RAGS：A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. echnical report[J]. Siam J Numeri Anal，2007，45(3)：1005-1034.

[3] Barthelmann V, Novak E, Ritter K. RAGS: High dimensional polynomial interpolation on sparse grids[J]. Adv Comput Math, 2000,12(4):273-288.

[4] Smolyak S. Interpolation and quadrature formulas for the classes W_s^a and E_s^a [J]. Soviet Math Dokl, 1963,4:240-243.

[5] Gerstner T, Griebel M. RAGS: Numerical integration using sparse grids[J]. Numer Algorithms, 1998,18(3/4):209-232.

[6] Winckel G. RAGS: Fast Clenshaw-Curtis quadrature[J]. The Mathworks Central File Exchange, 2005.2. http://www.mathworks.com/matlabcentral/files/6911/clencurtom.

[7] Keese A, Matthies H. RAGS: Numerical methods and smolyak quadrature for nonlinear[J]. Partial Differential Equations: Informatikbericht, 2003,5:253-258.

[8] Smolyak S A. RAGS: Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions[J]. Soviet Mathematics, 1963,4:240-243.

[9] Bungartz H, Griebel M. Sparse grids[J]. Acta Numerica, 2004,13:147-269.

(上接第10页)

注记 定理2说明,当所有$\{T_{i,j}\}_{i,j\in \mathbf{N}}$排成无穷矩阵$(T_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$形状时,该定理只要求位于同一列的任何3个映射满足拟收缩条件,并不要求所有3个映射之间都满足拟收缩条件,但要求位于不同列的任何两个映射满足交换性;而定理1要求所有3个映射之间都满足拟收缩条件,但不要求任何交换性.另外,无论怎样取初始点,以任何列的映射族构造出的序列都收敛于$\{T_{i,j}\}_{i,j\in \mathbf{N}}$的唯一公共不动点.

参考文献:

[1] Dhage B. Generalized metric spaces and mappings with fixed points[J]. Bull Cal Math Soc, 1992,84:329-336.

[2] Singh B, Jain S, Jain S. Semicompatibility and fixed point theorems in an unbounded D-metric space[J]. Internat J Math & Math Sci, 2005,5:789-801.

[3] Dhage B, Arya S, Ume J. A general lemma for fixed point theorems involving more than two maps in D-metric spaces with applications[J]. Internat J Math & Math Sci, 2003,11:661-672.

[4] Dhage B, Asha A, Kang S. On common fixed points of pairs of a single and a multivalued coincidentally commuting mappings in D-metric spaces[J]. Internat J Math & Math Sci, 2003,40:2519-2539.

[5] Singh B, Jain S. Common fixed points of weak-compatible maps on D-metric space[J]. J Chung Cheong Math Soc, 2004,17(2):111-124.

[6] Singh B, Sharma R. Common fixed points via compatible maps in D-metric spaces[J]. Rad Mat, 2002,11(2):145-153.

[7] Gajic L. On a common fixed point for sequence of selfmappings in generalized metric space[J]. Novi Sad J Math, 2006,36(2):153-156.

[8] Dhage B. Some results on common fixed points-I[J]. Indian J of Pure Appl Math, 1999,30:827-837.