文章编号: 1004-4353(2014)01-0015-05

一类单部件可修复系统的稳定性及可靠性分析

刘东旭[1]， 司文艺[2]， 袁玉娇[1]

(1. 延边大学理学院 数学系; 2. 延边教育出版社 网络出版中心: 吉林 延吉 133000)

摘要: 研究了一类单部件可修复系统. 首先利用补充变量法建立了模型,并证明了此系统的动态解以指数形式收敛于系统的稳态解,并且当修复率 $\mu(x)$ 为某一阶梯函数时,系统的瞬时可用度的极限不再是牢固可用度,并给出了此时系统可靠的条件.

关键词: C_0-半群; 稳定性; 可靠性

中图分类号: O231.1　　　　**文献标识码:** A

The exponential stability and reliability analysis of a kind of single-component repairable system

LIU Dongxu[1], SI Wenyi[2], YUAN Yujiao[1]

(1. *Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*;

2. *Network Publishing Center*, *Yanbian Education Publishing House*: *Yanji* 133000, *China*)

Abstract: A kind of single-component repairable system is investigated. We set up the model with supplementary variable method, and prove that the dynamic solution of the system exponentially converges to the steady-state solution. Moreover, we prove that when the repair rate $\mu(x)$ is some piecewise function, the limit of instant state availability is not the steady state availability of the system. Last, we obtain the reliable condition of the system.

Key words: C_0-semigroup; stability; reliability

可用度是可修复系统的重要可靠性指标之一,它分为瞬时可用度和牢固可用度. 在工程应用中,人们通常注重的是牢固可用度. 对于单部件可修系统的牢固可用度 $A=\dfrac{E(X)}{E(X)+E(Y)}$,其中 X 和 Y 分别代表系统的寿命和故障后的修理时间,国内外很多研究者进行了研究. 例如:文献[1] 的作者给出了任意分布的置信限;文献[2-4] 通过一般化 p-值逼近给出了 X 和 Y 服从不同分布时的牢固可用度的估计和置信限;文献[5] 指出:对于单部件可修复系统的瞬时可用度,如果寿命分布和修理时间分布都是指数分布,那么 t 时刻的瞬时可用度可表示为 $A(t)=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}+\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}$,其中 λ 和 μ 分别是系统的常数故障率和常数修复率,显然其瞬时可用度关于时间 t 单调下降. 目前为止,有关讨论单部件可修复系统中修复率为函数时的情况还未见报道,为此,本文将研究修复率为函数时的单部件可修复系统的稳定性和可靠性.

收稿日期: 2013-04-25

作者简介: 刘东旭(1984—),男,助教,研究方向为应用泛函分析.

1　模型描述

单部件可修复系统由一个部件构成,当部件工作时系统工作,当部件故障时系统故障. 当修复率为函数时,利用文献[5]中的补充变量法,单部件可修复系统的模型可用如下方程组描述:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda p_0(t)+\displaystyle\int_0^\infty \mu(x)p_1(x,t)\mathrm{d}x,\\ \dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}+\dfrac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=-\mu(x)p_1(x,t),\\ p_1(0,t)=\lambda p_0(t),\\ p_0(0)=1,\ p_1(x,0)=0.\end{cases}\tag{1}$$

其中0状态表示系统正常运行,1状态表示系统故障,$p_0(t)$代表t时刻系统处于正常状态的概率,λ表示系统的常数故障率,$\mu(x)$表示系统处于故障状态且修复时间为x的修复率,$p_1(x,t)$为t时刻系统处于故障状态且修复时间为x的概率. 本文假设$0<\mu(x)<+\infty$,$\int_0^\infty \mu(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty$,显然$p_0(t)+p_1(t)=1$.

下面在Banach空间中用抽象Cauchy问题的形式描述系统(1). 设$A=\mathrm{diag}\left(-\lambda,-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu(x)\right)$,$B=\begin{pmatrix}0 & \int_0^\infty \mu(x)\mathrm{d}x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 取状态空间$X=\{\boldsymbol{y}\in \mathbf{R}\times L^1[0,\infty)\mid \|y\|=|y_0|+\|y_1\|_{L^1[0,\infty)}\}$,显然$(X,\|\cdot\|)$是一个Banach空间. 取算子$A$的定义域$D(A)=\left\{\boldsymbol{p}\in X\,\middle|\,\dfrac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}\in L^1[0,\infty),p_1(x)\text{是绝对连续函数,且}\ p_1(0)=\lambda p_0\right\}$,则系统(1)可描述为Banach空间$X$中的一个抽象Cauchy问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t)}{\mathrm{d}t}=(A+B)\boldsymbol{P}(t),\ t>0;\\ \boldsymbol{P}(0)=(1,0)^{\mathrm{T}}.\end{cases}\tag{2}$$

2　系统解的稳定性

依照文献[6],易验证:① 算子$A+B$是预解正算子,且为耗散算子;② 当$\mathrm{Re}\gamma>0$时,$\gamma\in\rho(A)$,并且$\|(\gamma I-A)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{Re}\gamma}$. 故由算子半群扰动理论可知,算子$A+B$生成一个正的压缩$C_0$-半群$T(t)$,并有如下结论:

定理1　系统(2)存在唯一的非负解$\boldsymbol{P}(t)$,且$\boldsymbol{P}(t)=T(t)\boldsymbol{P}(0)$.

下面证明系统的解具有指数稳定性.

定理2　0是算子$A+B$的简单本征值.

证明　考虑方程$(\gamma I-A-B)\boldsymbol{P}=0$,即

$$-(\gamma+\lambda)p_0+\int_0^\infty \mu(x)p_1(x)\mathrm{d}x=0,\tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}+(\gamma+\mu(x))p_1(x)=0,\tag{4}$$

解(4)式得$p_1(x)=p_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}$,将其代入(3)式得

$$\begin{cases}-(\gamma+\lambda)p_0+p_1(0)\displaystyle\int_0^\infty \mu(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x=0,\\ \lambda p_0-p_1(0)=0.\end{cases}\tag{5}$$

记方程组(5)的系数行列式为 $D(\gamma)=\begin{vmatrix}-(\gamma+\lambda) & \int_0^{\infty}\mu(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x \\ \lambda & -1\end{vmatrix}$，特别地，当 $\gamma=0$ 时，$\int_0^{\infty}\mu(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x=1$，故此时 $D(0)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 \\ \lambda & -1\end{vmatrix}=0$，即 0 是算子 $A+B$ 的本征值，而其对应的一个非负本征向量为 $\boldsymbol{P}=(p_0,p_1(x))$.

易知 0 是算子 $A+B$ 的共轭算子 $(A+B)^*$ 的本征值，且 $\boldsymbol{Q}=(1,1)$ 是算子 $(A+B)^*$ 相应于 0 的本征向量，于是有 $\langle\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\rangle=p_0+\int_0^{\infty}p_1(x)\mathrm{d}x>0$，且对任意 $\boldsymbol{P}\in D(A+B)$ 有 $\langle(A+B)\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\rangle=0$，即 $(A+B)^*\boldsymbol{Q}=0$，从而 0 是 $A+B$ 的简单本征值. 由此可知，若令 $\|p_0\|=1$，将 $\boldsymbol{P}=(p_0,p_1(x))$ 正规化得到的向量 $\boldsymbol{P}^*=(\hat{p}_0,\hat{p}_1(x))$ 是系统的稳态正解.

定理 3 $\{\gamma\in C\,|\,\mathrm{Re}\gamma>0$ 或 $\gamma=\mathrm{i}a,\ a\in\mathbf{R},\ a\neq0\}\subset\rho(A+B)$.

证明 对 $\forall\gamma\in C$，$\mathrm{Re}\gamma>0$ 或 $\gamma=\mathrm{i}a$，$a\in\mathbf{R}$，$a\neq0$ 有：

$$\begin{cases}(\gamma+\lambda)p_0-\int_0^{\infty}\mu(x)p_1(x)\mathrm{d}x=y_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}+(\gamma+\mu(x))p_1(x)=y_1(x), \\ p_1(0)=\lambda p_0.\end{cases}\tag{6}$$

解方程组(6)得 $p_1(x)=\lambda p_0\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_\tau^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}y_1(\tau)\mathrm{d}\tau$，因为 $y_1(x)\in L^1[0,\infty)$，故 $p_1(x)\in L^1[0,\infty)$. 因此方程组(6)有唯一解，从而 $R(\gamma I-(A+B))=X$. 由于 $\gamma I-(A+B)$ 是闭算子，由闭图像定理知，$(\gamma I-(A+B))^{-1}$ 存在且有界，故 $\gamma\in\rho(A+B)$. 证毕.

定义 $\tilde{A}=\mathrm{diag}\left(-\lambda-c,-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu(x)\right)$，$\tilde{B}=\begin{pmatrix}c & \int_0^{\infty}\mu(x)\mathrm{d}x \\ 0 & 0\end{pmatrix}$，其中 $0<c<\dfrac{1}{x}\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi$，$x\in(0,+\infty)$，此时 $\tilde{A}+\tilde{B}=A+B$.

定理 4 假定 $\tilde{A}$ 与 c 如前定义，则当 $\mathrm{Re}\gamma>-c$ 时，$\gamma\in\rho(\tilde{A})$，并且 $\|(\gamma I-\tilde{A})^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{Re}\gamma+c}$.

证明 当 $\mathrm{Re}\gamma>-c$ 时，对任意给定的 $\boldsymbol{y}=(y_0,y_1(x))$，考虑预解方程 $(\gamma I-\tilde{A})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{P}=(p_0,p_1(x))$，其解析表达式为 $\begin{cases}(\gamma+\lambda+c)p_0=y_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}+(\gamma+\mu(x))p_1(x)=y_1(x), \\ p_1(0)=\lambda p_0.\end{cases}$ 由于 $\mathrm{Re}\gamma>-c$，故 $\gamma\neq-\lambda-c$. 解上述方程组得 $p_0=\dfrac{y_0}{\gamma+\lambda+c}$，$p_1(x)=\lambda p_0\mathrm{e}^{-\int_0^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}+\int_0^x\mathrm{e}^{-\int_\tau^x[\gamma+\mu(\xi)]\mathrm{d}\xi}y_1(\tau)\mathrm{d}\tau$.

依照文献[7]中的估值方法，易知 $\|\boldsymbol{P}\|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{Re}\gamma+c}\|\boldsymbol{y}\|_{L^1[0,\infty)}$. 这说明 $\mathrm{Re}\gamma>-c$ 时，$(\gamma I-\tilde{A})^{-1}$：$X\to X$ 是有界的，所以 $\gamma\in\rho(\tilde{A})$，并且 $\|(\gamma I-\tilde{A})^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{Re}\gamma+c}$.

推论 1 设 $\tilde{A}$ 如前定义，c 如前假定，那么算子 $\tilde{A}$ 生成的压缩半群 $S(t)$ 是指数衰减的，即对任意的 $c>\omega>0$，$\|S(t)\|\leqslant\mathrm{e}^{-\omega t}$，$t>0$.

注意到算子 $\tilde{B}$ 是一个有限秩算子，从而是紧算子，利用算子半群扰动定理以及紧扰动，有以下结果：

定理5 设$\widetilde{A}$如前定义,c如前假定,那么算子$\widetilde{A}+\widetilde{B}$(即算子$A+B$)生成的压缩半群$T(t)$具有下面性质:

1) $\gamma\in C$, $\mathrm{Re}\gamma+c>0$时,$\gamma\in\sigma(A+B)\Leftrightarrow D(\gamma)=0$.

2) 设$\gamma_0=0$,对任意的$\gamma_k\in\{\gamma\in C\mid \mathrm{Re}\gamma>-c, D(\gamma)=0\}$, $\gamma_k\neq\gamma_0$. 其中γ_k按照实部递减排序$\mathrm{Re}\gamma_{k+1}\leqslant\mathrm{Re}\gamma_k$, $k=1,2,3,\cdots,N$, 则$\gamma_0=0$是$A+B$的严格占优本征值.

3) 设$\boldsymbol{P}^*=(\hat{p}_0\ \hat{p}_1(x))$是系统的稳态解,满足条件$\langle\boldsymbol{P}^*,\boldsymbol{Q}\rangle=1$,那么对$\boldsymbol{P}(0)\in X$, $\boldsymbol{Q}=(1,1)$,存在常数$M>0$和$\delta>0$,使得$\|T(t)\boldsymbol{P}(0)-\langle\boldsymbol{P}(0),\boldsymbol{Q}\rangle\boldsymbol{P}^*\|\leqslant M\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\gamma_1+\delta)t}$, $t\geqslant 0$.

证明 1) 当$\mathrm{Re}\gamma>-c$时,按照定理4,$\gamma\in\rho(\widetilde{A})$,那么$\gamma I-\widetilde{A}-\widetilde{B}=(\gamma I-\widetilde{A})(I-R(\gamma,\widetilde{A})\widetilde{B})$. 因为紧算子存在非零谱值,其必为本征值,从而$\gamma\in\rho(\widetilde{A}+\widetilde{B})$的充要条件是1不是$R(\gamma,\widetilde{A})\widetilde{B}$的本征值. 因此,当$\mathrm{Re}\gamma+c>0$时,$\gamma\in\sigma(A+B)\Leftrightarrow D(\gamma)=0$.

2) 易知$D(\gamma)$在$\mathrm{Re}\gamma>-c$上是解析函数,至多有有限个零点,且在有限区域内没有聚点. 由上面的讨论知:算子$A+B$的谱在左半平面,虚轴上的点除零点外都在预解集中. 因0是$A+B$的具有正本征向量的简单本征值,再由严格占优本征值的定义知0是严格占优本征值.

设$\gamma_0=0$,对任意的$\gamma_k\in\{\gamma\in C\mid \mathrm{Re}\gamma>-c, D(\gamma)=0\}$, $\gamma_k\neq\gamma_0$. 其中γ_k按照实部递减排序$\mathrm{Re}\gamma_{k+1}\leqslant\mathrm{Re}\gamma_k$, $k=1,2,\cdots,N$, 则$\gamma_0=0$是$A+B$的严格占优本征值.

3) 依照半群扰动定理,紧扰动不改变半群的本质谱界,所以$A+B$生成的半群$T(t)$与算子$\widetilde{A}$生成的半群$S(t)$有相同的本质谱界[8-9],从而$T(t)$的本质谱界$\omega(A+B)\leqslant\omega_0(A+B)$. 根据算子半群有限展开定理,对$\boldsymbol{P}(0)\in X$以及$\boldsymbol{Q}=(1,1)$,存在常数$M>0$和$\delta>0$,使得

$$\|T(t)\boldsymbol{P}(0)-\langle\boldsymbol{P}(0),\boldsymbol{Q}\rangle\boldsymbol{P}^*\|\leqslant M\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\gamma_1+\delta)t},\ t>0.$$

上述结果表明,在一定条件下系统的动态解是以指数形式收敛于系统的稳态解.

3 系统的可靠性分析

下面讨论$\mu(x)$为函数时,瞬时可用度$p_0(t)$和牢固可用度p_0^*的关系. 通常人们将$\mu(x)$作为常数来研究,此时$\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=p_0^*$,但是当$\mu(x)$为函数时,有时$p_0(t)$并不以$p_0^*$为极限. 取$\mu(x)$为一个分段函数:$\mu(x)=\begin{cases}\mu_0, & 0<x\leqslant t_0,\\ \mu_1, & x>t_0.\end{cases}$若$\mu_1<\mu_0$,易知系统的瞬时可用度$p_0(t)$单调下降,并且$\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=p_0^*$. 而事实上,由于维修资本追加、设备维护水平提高等因素,修复率一般会增大,所以需考察当$\mu_1>\mu_0$时的情况. 令$\mu_1=\mu_0+h$,其中$h>0$.

定理6 当$0<t\leqslant t_0$时,$p_0(t)$单调递减.

证明 由于$p_1(t)=1-p_0(t)$,故当$0<t\leqslant t_0$时,系统中的第1个方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda+\mu_0)p_0(t)+\mu_0$,解得$p_0(t)=\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu_0)t}p_0(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu_0)(t-s)}\mu_0\,\mathrm{d}s=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_0}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu_0)t}+\dfrac{\mu_0}{\lambda+\mu_0}$. 显然$\dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}<0$,因此$p_0(t)$单调递减.

定理7 当$t>t_0$时,使$p_0(t)$保持单调递减的条件是$h<\dfrac{\lambda+\mu_0}{\mathrm{e}^{(\lambda+\mu_0)t_0}-1}$.

证明 对系统重置初值,令$\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{P}(t_0)=(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_0}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu_0)t_0}+\dfrac{\mu_0}{\lambda+\mu_0},\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu_0}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu_0)t_0})$. 当$t>t_0$时,方程(1)中的第1个方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-(\lambda+\mu_0+h)p_0(t)+\mu_0+h$,解得

$$p_0(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0}e^{-(\lambda+\mu_0)t}+\frac{\mu_0}{\lambda+\mu_0}-\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}\right)e^{-(\lambda+\mu_0+h)(t-t_0)}+\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}.$$

对 $p_0(t)$ 求导得

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-(\lambda+\mu_0+h)e^{-(\lambda+\mu_0+h)(t-t_0)}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0}e^{-(\lambda+\mu_0)t_0}+\frac{\mu_0}{\lambda+\mu_0}-\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}\right),$$

显然 $-(\lambda+\mu_0+h)e^{-(\lambda+\mu_0+h)(t-t_0)}<0$. 令 $\frac{dp_0(t)}{dt}<0$，则有 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0}e^{-(\lambda+\mu_0)t_0}+\frac{\mu_0}{\lambda+\mu_0}-\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}>0$；整理得 $h<\frac{\lambda+\mu_0}{e^{(\lambda+\mu_0)t_0}-1}$.

由此看出，当 $h<\frac{\lambda+\mu_0}{e^{(\lambda+\mu_0)t_0}-1}$ 时，$p_0(t)$ 在整个定义域 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以在整个定义域上系统的瞬时可用度一直大于牢固可用度，且 $\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}=p_0^*$. 而当 $h>\frac{\lambda+\mu_0}{e^{(\lambda+\mu_0)t_0}-1}$ 时，$p_0(t)$ 在 $(t_0,+\infty)$ 上单调递增，$\lim\limits_{t\to\infty}p_0(t)=\frac{\mu_0+h}{\lambda+\mu_0+h}>p_0^*$，此时系统瞬时可用度的极限不再是牢固可用度.

参考文献：

[1] Wang Wendai, Keceioglu Dimitri B. Confidence limits on the inherent availability of equipment[C]//2000 Proceedings Annual Reliability and Mainability Symposium, 2000:162-168.

[2] Ananda M M A, Gamage J. On steady state availability of system with lognormal repair time[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004,150:409-416.

[3] Ananda M M A. Confidence intervals for steady state availability of a system with exponential operating time and lognormal repair time[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003,137:499-509.

[4] Chandrasekar P, Natarajan R. Confidence limit for steady state availability of systems with lognormal operating time and inverse Gaussian repair time[J]. Microelectron Reliab, 1997,37(6):969-971.

[5] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：高等教育出版社，2006.

[6] Pazy A. Semigroups of linear operators and application to partial differential equations[M]. New York: Springer, 1983:13-22.

[7] Liu Dongxu, Jin Aidong, Zhang Yufeng. Exponential stability of a four-state system[J]. Journal of Information and Decision Science, 2009,4(1):75-82.

[8] 许跟起. 强连续半群本质谱半径的扰动定理[J]. 数学学报，1990,33(6):757-763.

[9] 许跟起. 强连续 (C_0) 半群扰动本质谱半径的估计[J]. 数学学报，1993,36(3):335-340.