文章编号：1004-4353(2014)01-0001-07

带有高斯取整函数的两个非线性三项递推关系的周期性

张晏志[1]， 郑穗生[2*]

(1. 台湾清华大学 工业工程与工程管理学系；2. 台湾清华大学 数学系：台湾 新竹 30043)

摘要：研究了带有高斯取整函数的两个非线性三项递推关系 $\varphi_{k-1}+\varphi_{k+1}=[\varphi_k]$，$\varphi_{k-1}+\varphi_k+\varphi_{k+1}=[\varphi_k]$，$k\in\mathbf{Z}$的周期性，通过递推分析找到了两个递推关系的所有解的最小正周期，并证明了任何解的周期均为 12.

关键词：非线性递推关系；周期解；生成元；转化

中图分类号：O156.4 **文献标识码**：A

Periodicity of two nonlinear three term recurrence relations involving the Gauss bracket function

ZHANG Yanzhi[1]， ZHENG Suisheng[2*]

(1. *Department of Industrial Engineering and Industrial Management*, *Tsinghua University*;
2. *Department of Mathematics*, *Tsinghua University*: *Hsinchu* 30043, *China*)

Abstract: Two discontinuous three term recurrence relations $\varphi_{k-1}+\varphi_{k+1}=[\varphi_k]$, and $\varphi_{k-1}+\varphi_k+\varphi_{k+1}=[\varphi_k]$, $k\in\mathbf{Z}$ involving the Gauss bracket function are studied. By recursion and analysis, we find the least periods of all their solutions and prove that any solution has the period 12.

Key words: nonlinear recurrence relation; periodic solution; generator; translation

0 引言

因非光滑动力系统可以模拟脉冲控制功能的物理过程，因此具有重要研究意义. 通常，这些系统很难处理，因此找到有通解或可完整分析其周期性的源方程十分重要. 本文介绍了两种带有高斯取整函数的不连续三项递推关系，并给出了它们的周期性，为处理该类问题的周期性提供了一种参考方法. 本文的研究方法是基于把解的整数部分和分数部分分开，通过递推分析寻找它们的最小周期. 类似于本文的方法已应用于 Heaviside 方程的不连续递推关系[1-3].

考虑不连续递推关系

$$\varphi_{k-1}+\varphi_{k+1}=[\varphi_k], \tag{1}$$

其中 $k\in\mathbf{Z}:=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$. 假设 φ 是问题(1) 的一个整数解，即对任意 k，φ_k 是整数，则(1) 式是线性齐次递推关系

$$\varphi_{k-1}+\varphi_{k+1}=\varphi_k, \tag{2}$$

收稿日期：2013－12－15

* **通信作者**：郑穗生(1953—)，男，博士生导师，教授，研究方向为离散动力系统.

其特征方程为 $x^2-x+1=0$. 这是一个序为 6 的割圆多项式,其根为 $\lambda_{\pm}=\cos(\pi/3)\pm \mathrm{i}\sin(\pi/3)$[4-5]. 因此,$\varphi$ 是周期的并且周期为 6. 然而,当 φ_k 不是整数时,确定问题(1) 的非整数解的周期并不容易. 因此,本文将证明:如果 φ 是问题(1) 的解,则 φ 是周期的并且 12 是它的周期;φ 的最小周期为 1,4,6 或 12[4].

为了方便,本文对文中的一些符号和基本概念作如下说明:

(a) $\mathbf{R},\mathbf{Z},\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}^+$ 分别表示实数集,整数集,非负整数集和正整数集.

(b) 令 x 为实数. $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 定义 x 取整为 $[x]$, x 取分数为 $\langle x\rangle=(x-[x])\in[0,1)$. 若 $\langle x\rangle=0$, 则 $[\langle x\rangle]=0$; 若 $\langle x\rangle\in(0,1)$, 则 $[-\langle x\rangle]=[-1+(1-\langle x\rangle)]=[-1]=-1$, 当 $\langle\langle x\rangle\rangle=\langle x\rangle$ 时,有 $\langle 1-\langle x\rangle\rangle=1-\langle x\rangle$. 假设 α 是整数, $\varepsilon\in[0,1)$, 有 $[\alpha+\varepsilon]=[\alpha]=\alpha$ 且 $[\alpha-\varepsilon]=\begin{cases}[\alpha]=\alpha,\ \varepsilon=0;\\ [\alpha-1+(1-\varepsilon)]=\alpha-1,\ \varepsilon\in(0,1).\end{cases}$ 另外,若 $\varepsilon>0$, 则有 $\langle\alpha+\varepsilon\rangle=\langle\alpha\rangle+\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon\rangle$ 和 $\langle\alpha+1-\varepsilon\rangle=\langle\alpha\rangle+\langle 1-\varepsilon\rangle=\langle 1-\varepsilon\rangle$.

(c) 若任意 ψ_i 是整数,则实序列 $\psi=\{\psi_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ 是整数列. 若存在 $k\in\mathbf{Z}$, 使得 ψ_k 不是整数,则 ψ 是非整数列.

(d) 对任意 $i\in\mathbf{Z}$, 存在正整数 τ, 使得 $\psi_{i+\tau}=\psi_i$, 则(标量或向量)序列 $\psi=\{\psi_m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ 叫做周期的. 正整数 τ 叫做 ψ 的周期. 若 ψ 是周期的,且在 ψ 的所有周期中,存在最小周期 $\Omega\psi$, 记 $\Omega\psi=\omega$, 则 ψ 是 ω- 周期的,或叫做存在最小周期 ω. 即在周期序列中,实序列 ψ 的最小周期就是这个序列的周期.

1 主要结果

1.1 递推关系(1) 的周期性. 讨论如下函数的非线性三项递推关系的周期解:

$$\varphi_{k+1}+\varphi_{k-1}=[\varphi_k],\ k\in\mathbf{Z}. \tag{3}$$

实序列 $\varphi=\{\varphi_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是(3) 式的解,是指将其代入(3) 式使其成为恒等式. (3) 式可以改写为:

$$\varphi_{k+1}=[\varphi_k]-\varphi_{k-1}, \tag{4}$$

$$\varphi_{k-1}=[\varphi_k]-\varphi_{k+1}, \tag{5}$$

由此知(3) 式的解 φ 是由其任意两个连续项 $(\varphi_k,\varphi_{k+1})$ 唯一决定的,尤其易知 φ 是(3) 式的整数解,当且仅当对任意 $m\in\mathbf{Z}$, φ_m 和 φ_{m+1} 是整数.

定义 3 个集合: $\Gamma_0=(0,1)\times(0,1)$, $\Gamma_1=(0,1)\times\{0\}$ 和 $\Gamma_2=\{0\}\times(0,1)$. 这 3 个集合将 $\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\,|\,0\leqslant u,v<1\}\setminus\{(0,0)\}$ 进行了分块. 通过高斯取整函数的性质,有如下的引理.

引理 1 设 φ 是(3) 式的解,则存在 $k\in\mathbf{Z}$, 使得:

$$\langle\varphi_{k+2}\rangle\in\begin{cases}\{0\},\ \langle\varphi_k\rangle=0,\\ (0,1),\ \langle\varphi_k\rangle>0;\end{cases} \tag{6}$$

$$[\varphi_{k+2}]=\begin{cases}[\varphi_{k+1}]-[\varphi_k],\ \langle\varphi_k\rangle=0,\\ [\varphi_{k+1}]-[\varphi_k]-1,\ \langle\varphi_k\rangle\neq 0;\end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_{k+3}=\begin{cases}-1-[\varphi_k]-\langle\varphi_{k+1}\rangle,\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0,\\ -1-[\varphi_k],\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_1,\\ -[\varphi_k]-\langle\varphi_{k+1}\rangle,\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_2,\\ -[\varphi_k],\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\{(0,0)\}.\end{cases} \tag{8}$$

证明 不失一般性,令 $k=0$. 首先考虑(6) 式,由(3) 式得

$$[\varphi_2]=[[\varphi_1]-\varphi_0]=[[\varphi_1]-([\varphi_0]+\langle\varphi_0\rangle)]=[\varphi_1]-[\varphi_0]+[-\langle\varphi_0\rangle]. \tag{9}$$

注意到 $\langle\varphi_0\rangle\in[0,1)$, 若 $\langle\varphi_0\rangle\in(0,1)$, 则 $(1-\langle\varphi_0\rangle)\in(0,1)$. 因此,若 $\langle\varphi_0\rangle=0$, 则由(9) 式得 $\varphi_2=$

$[\varphi_2]+\langle\varphi_2\rangle=[\varphi_1]-[\varphi_0]+[-\langle\varphi_0\rangle]=[\varphi_1]-[\varphi_0]$，从而$\langle\varphi_2\rangle=0$；若$\langle\varphi_0\rangle>0$，则$(1-\langle\varphi_0\rangle)\in(0,1)$，再由(9)式得 $\varphi_2=[\varphi_2]+\langle\varphi_2\rangle=([\varphi_1]-[\varphi_0]-1)+(1-\langle\varphi_1\rangle)$，从而$[\varphi_2]=[\varphi_1]-[\varphi_0]-1$，$\langle\varphi_2\rangle=1-\langle\varphi_0\rangle$，(6)式成立.

考虑(7)式，由(3)式可知

$$[\varphi_0]-[\varphi_1]+[\varphi_2]=[\varphi_0]-[\varphi_1]+[[\varphi_1]-\varphi_0]=[\varphi_0]-[\varphi_1]+[\varphi_1]+[-\varphi_0]=[\varphi_0]+[-([\varphi_0]+\langle\varphi_0\rangle)]=[-\langle\varphi_0\rangle]. \tag{10}$$

因为$\langle\varphi_0\rangle\in[0,1)$，所以如果$\langle\varphi_0\rangle=0$(或$\langle\varphi_0\rangle>0$)，则可得出$[-\langle\varphi_0\rangle]=0$(或$-1$)，由此(7)式成立.

考虑(8)式. 假设$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\{(0,0)\}$，由(6)式得$\langle\varphi_2\rangle=0$，再由(3)式和(7)式得 $\varphi_3=[\varphi_2]-\varphi_1=[\varphi_1]-[\varphi_0]-\varphi_1=-[\varphi_0]$. 假设$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_0$，由(6)式知$\langle\varphi_2\rangle>0$，而由(3)式和(7)式得 $\varphi_3=[\varphi_2]-\varphi_1=[\varphi_1]-[\varphi_0]-1-[\varphi_1]-\langle\varphi_1\rangle=-1-[\varphi_0]-\langle\varphi_1\rangle$. 再由(6)式和(7)式知，若$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_1$，则$\langle\varphi_0\rangle>0$，$\langle\varphi_1\rangle=0$. 所以 $\varphi_3=[\varphi_2]-\varphi_1=[\varphi_1]-[\varphi_0]-1-\varphi_1=-1-[\varphi_0]$. 若$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_2$，则$\langle\varphi_0\rangle=0$，$\langle\varphi_1\rangle>0$. 所以 $\varphi_3=[\varphi_2]-\varphi_1=[\varphi_1]-[\varphi_0]-[\varphi_1]-\langle\varphi_1\rangle=-[\varphi_0]-\langle\varphi_1\rangle$，由此(8)式成立. 证毕.

注 1　令 φ 是(3)式的解，则$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{(0,0)\}$. 若$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\{(0,0)\}\cup\Gamma_0$，则对任意 $m\in\mathbf{Z}^+$ 有$(\langle\varphi_m\rangle,\langle\varphi_{m+1}\rangle)\in\{(0,0)\}\cup\Gamma_0$；否则，对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$，有

$$(\langle\varphi_n\rangle,\langle\varphi_{n+1}\rangle)\in\Gamma_{\alpha+1},\ n\equiv\alpha \bmod 2. \tag{11}$$

事实上，假设 φ 是(3)式的解，则由定义知$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{(0,0)\}$. 设$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\{(0,0)\}$，由(6)式知 φ_2 和 φ_3 仍然是整数. 因此，由归纳知对任意 $k\in\mathbf{Z}^+$，φ_k 和 φ_{k+1} 为整数，即$(\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)=(0,0)$. 设$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_0$，则由(6)式知$\langle\varphi_2\rangle,\langle\varphi_3\rangle\in(0,1)$. 同样，通过归纳有$(\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in(0,1)$，$k\in\mathbf{Z}^+$.

假设$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$，若$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_1$，则$\langle\varphi_0\rangle>0$ 和$\langle\varphi_1\rangle=0$. 由(6)式得$\langle\varphi_2\rangle\in(0,1)$ 和$\langle\varphi_3\rangle=0$，从而有$(\langle\varphi_1\rangle,\langle\varphi_2\rangle)\in\Gamma_2$ 且$(\langle\varphi_2\rangle,\langle\varphi_3\rangle)\in\Gamma_1$. 由归纳知(11)式是正确的，并且当$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)\in\Gamma_2$ 时，也可以用相同的方法处理.

引理 2　(3)式的任意整数解 φ 是周期的，并且周期为 6. 如果存在 $k\in\mathbf{Z}$，使 $\varphi_k=\varphi_{k+1}=0$，则 $\varphi=\{0\}$；否则，φ 的周期是 6.

证明　因为 φ 是(3)式的整数解，对任意 $k\in\mathbf{Z}$ 有$\langle\varphi_k\rangle=0$. 首先由(8)式知，$\varphi_{k+6}=-\varphi_{k+3}=-(-\varphi_k)=\varphi_k$ 且 $\varphi_{k+7}=-\varphi_{k+4}=-(-\varphi_{k+1})=\varphi_{k+1}$，由此证明了 6 是 φ 的周期. 因此，$\Omega\varphi=1,2,3$ 或 6. 假设 3 是 φ 的周期，由(8)式得 $\varphi_{k+3}=-\varphi_k=\varphi_k$ 且 $\varphi_{k+4}=-\varphi_{k+1}=\varphi_{k+1}$，从而有 $\varphi_k=\varphi_{k+1}=0$. $\varphi=\{0\}$ 意味着 $\Omega\varphi=1$. 假设 $\Omega\varphi=2$，由(3)式知 $\varphi_{k+2}=[\varphi_{k+1}]-\varphi_k=\varphi_{k+1}-\varphi_k=\varphi_k$，由(8)式知 $\varphi_{k+3}=-\varphi_k=\varphi_{k+1}$，于是有 $\varphi_k=\varphi_{k+1}=0$，这与假设矛盾. 因此，若 $\varphi_k=\varphi_{k+1}=0$，由 $\varphi=\{0\}$ 得 $\Omega\varphi=1$；否则，$\Omega\varphi=6$. 证毕.

引理 3　(3)式的任意非整数解 ψ 是周期的，其周期为 12.

证明　因为 ψ 是(3)式的非整数解，对任意 $k\in\mathbf{Z}$，有$\langle\psi_k\rangle\neq0$ 或$\langle\psi_{k+1}\rangle\neq0$. 因此，由定义易知$(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$. 首先证明(12)式成立.

$$(\psi_{k+6},\psi_{k+7})=\begin{cases}([\psi_k],[\psi_{k+1}])+(1-\langle\psi_k\rangle,1-\langle\psi_{k+1}\rangle),\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0,\\([\psi_k],[\psi_{k+1}])+(1-\langle\psi_k\rangle,0),\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_1,\\([\psi_k],[\psi_{k+1}])+(0,1-\langle\psi_{k+1}\rangle),\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_2.\end{cases} \tag{12}$$

由(8)式有

$$[\psi_{k+3}]=\begin{cases}-2-[\psi_k],\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0,\\-1-[\psi_k],\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2,\\-[\psi_k],\ (\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\{(0,0)\}.\end{cases} \tag{13}$$

再由(4)式得

$$\psi_6=[\psi_5]-\psi_4=[\psi_5]-[\psi_3]+\psi_2=[\psi_5]-[\psi_3]+[\psi_1]-\psi_0. \tag{14}$$

为简便起见,令 $k=0$. 若 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_0$, 则由注 1、$\langle\psi_2\rangle>0$ 和(13)、(6)式有

$$[\psi_5]-[\psi_3]=-2-[\psi_2]-(-2-[\psi_0])=[\psi_0]-([\psi_1]-[\psi_0]-1)=2[\psi_0]-[\psi_1]+1.$$

因此,由(14)式得

$$\psi_6=[\psi_5]-[\psi_3]+[\psi_1]-\psi_0=2[\psi_0]-[\psi_1]+1+[\psi_1]-[\psi_0]-\langle\psi_0\rangle=[\psi_0]+1-\langle\psi_0\rangle.$$

通过类似方法易知 $\psi_7=[\psi_1]+1-\langle\psi_1\rangle$. 通过归纳可知, $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0$ 时,(12)式是正确的. 设 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_1$ 或 Γ_2. 由(11)式、$(\langle\psi_2\rangle,\langle\psi_3\rangle)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 和(13)式有

$$[\psi_5]-[\psi_3]=-1-[\psi_2]-(-1-[\psi_0])=[\psi_0]-[\psi_2]. \tag{15}$$

若 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_1$, 则 $\langle\psi_0\rangle>0$. 再由(14)、(15)和(7)式得

$$\psi_6=[\psi_5]-[\psi_3]+[\psi_1]-\psi_0=[\psi_0]-[\psi_2]+[\psi_1]-\psi_0=$$
$$[\psi_0]-([\psi_1]-[\psi_0]-1)+[\psi_1]-[\psi_0]-\langle\psi_0\rangle=[\psi_0]+1-\langle\psi_0\rangle.$$

若 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_2$, 则 $\langle\psi_0\rangle=0$, 即 $\varphi_0=[\varphi_0]$. 再由(14)、(15)和(7)式得

$$\psi_6=[\psi_5]-[\psi_3]+[\psi_1]-\psi_0=[\psi_0]-[\psi_2]+[\psi_1]-\psi_0=$$
$$[\psi_0]-([\psi_1]-[\psi_0])+[\psi_1]-[\psi_0]=[\psi_0].$$

由(11)式知,若 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_1$(或 $\in\Gamma_2$), 则有 $(\langle\psi_1\rangle,\langle\psi_2\rangle)\in\Gamma_2$(或 $\in\Gamma_1$). 因此有

$$\psi_7=\begin{cases}[\psi_1],\ (\langle\psi_1\rangle,\langle\psi_2\rangle)\in\Gamma_1;\\ [\psi_1]+1-\langle\psi_1\rangle,\ (\langle\psi_1\rangle,\langle\psi_2\rangle)\in\Gamma_2.\end{cases}$$

综上所述,当 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)\in\Gamma_1$ 或 Γ_2 时,(12)式成立.

下面证明 12 是 ψ 的周期. 设存在 $k\in\mathbf{Z}$, 有 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0$. 则由注 1 可知,对任意 $k\in\mathbf{Z}$, 有 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0$. 由(12)式得

$$\psi_{k+12}=[\psi_{k+6}]+1-\langle\psi_{k+6}\rangle=[[\psi_k]+1-\langle\psi_k\rangle]+1-\langle[\psi_k]+1-\langle\psi_k\rangle\rangle=$$
$$[\psi_k]+[1-\langle\psi_k\rangle]+1-\langle[\psi_k]\rangle-\langle 1-\langle\psi_k\rangle\rangle=[\psi_k]+1-\langle 1-\langle\psi_k\rangle\rangle=$$
$$[\psi_k]+1-1+\langle\psi_k\rangle=[\psi_k]+\langle\psi_k\rangle=\psi_k.$$

同理,易得 $\psi_{k+13}=\psi_{k+1}$, 即 12 是 ψ 的周期. 设 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_1$ 或 Γ_2, 若 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_1$, 则有 $\psi_{k+1}=[\psi_k]$. 由(11)式知, $(\langle\psi_{k+6}\rangle,\langle\psi_{k+7}\rangle)\in\Gamma_1$ 且 $(\langle\psi_{k+1}\rangle,\langle\psi_{k+2}\rangle,\langle\psi_{k+7}\rangle,\langle\psi_{k+8}\rangle)\in\Gamma_2$. 因此,由(12)式和之前的讨论可得 $\psi_{k+12}=[\psi_{k+6}]+1-\langle\psi_{k+6}\rangle=\psi_k$, 并且 $\psi_{13}=[\psi_{k+7}]=[\psi_{k+1}]=\psi_{k+1}$. 因此 ψ 是周期的,且周期为 12. 当 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_2$ 时,可用类似的方法讨论. 证毕.

定理 1 对(3)式中任意解 ψ(ψ 是周期的且周期为 12),有如下结论成立:

(i) 设 ψ 是(3)式的整数解,对任意 $k\in\mathbf{Z}$, $\langle\varphi_k\rangle=\langle\varphi_{k+1}\rangle=0$, 且

$$\Omega\psi=\begin{cases}1,\ (\psi_k,\psi_{k+1})=(0,0),\\ 6,\ 其他.\end{cases} \tag{16}$$

(ii) 设 ψ 是(3)式的非整数解,对任意 $k\in\mathbf{Z}$, $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$. 若 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0$, $([\psi_k],[\psi_{k+1}])=(-1,-1)$, 则

$$\Omega\psi=\begin{cases}1,\ (\langle\psi\rangle_k,\langle\psi_{k+1}\rangle)=(1/2,1/2),\\ 4,\ (\langle\psi\rangle_k,\langle\psi_{k+1}\rangle)\neq(1/2,1/2);\end{cases} \tag{17}$$

否则

$$\Omega\psi=\begin{cases}6,\ (\langle\psi\rangle_k,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\{(1/2,1/2),(1/2,0),(0,1/2)\},\\ 12,\ 其他.\end{cases} \tag{18}$$

证明　由引理 2 知，若 ψ 是(3)式的整数解，则(16)式成立. 假设 ψ 是(3)式的非整数解，则由(3)式可知，存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得 $\langle\psi_k\rangle\neq 0$ 或 $\langle\psi_{k+1}\rangle\neq 0$，即 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$. 为了简便，令 $k=0$. 首先证明(17)式成立. 令 $(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)=(u,v)\in\Gamma_0$，$[\psi_0]=[\psi_1]=-1$，当 $u,v\in(0,1)$ 时，$[-u]=[-v]=-1$. 若 $(u,v)=(1/2,1/2)$，则 $\psi_0=\psi_1=-1/2$. 再由(3)式有

$$\psi_2=[\psi_1]-\psi_0=\left[-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},$$

$$\psi_3=[\psi_2]-\psi_1=\left[-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},$$

于是有 $\psi=\{-1/2\}$. 若 $(u,v)\neq(1/2,1/2)$，则由(3)式知：

$$\psi_2=[\psi_1]-\psi_0=-1-(-1+v)=-u,$$

$$\psi_3=[\psi_2]-\psi_1=[-u]+1-v=-1+1-v=-v,$$

$$\psi_4=[\psi_3]-\psi_2=[-v]+u=-1+u,$$

$$\psi_5=[\psi_4]-\psi_3=[-1+u]+v=-1+v.$$

由此可知 4 是 ψ 的周期，且 $(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\psi_3)=(-1+u,-1+v,-u,-v)$. 假设 2 是 ψ 的周期，则 $\psi_2=-u=-1+u=\psi_0$，$\psi_3=-v=-1+v=\psi_1$. 由此可知 $u=v=1/2$，这与假设矛盾. 因此，ψ 的周期是 4.

下面证明(18)式. 为了简便，记 $([\psi_0],[\psi_1])=(p,q)$，$(\langle\psi_0\rangle,\langle\psi_1\rangle)=(s,t)$. 由引理 3 知，$\psi$ 是周期的且周期为 12. 首先考虑 $(s,t)\in\Gamma_0$. 由注 1 可知，对任意 $k\in\mathbf{Z}$，有 $(\langle\psi_k\rangle,\langle\psi_{k+1}\rangle)\in\Gamma_0$，从而由(12)式得

$$(\psi_6,\psi_7)=([\psi_0],[\psi_1])+(1-\langle\psi_0\rangle,1-\langle\psi_1\rangle)=(p+1-s,q+1-t). \tag{19}$$

假设 $(s,t)=(1/2,1/2)$. 由(19)式知 $(\psi_6,\psi_7)=(p+1/2,q+1/2)=(\psi_0,\psi_1)$，即 6 是 ψ 的周期. 假设 3 也是 ψ 的周期，则由(13)式知 $[\psi_3]=-2-[\psi_0]=-2-p=p=[\psi_0]$，$[\psi_4]=-2-[\psi_1]=-2-q=q=[\psi_1]$，即 $p=q=-1$，这与假设矛盾. 令 $\Omega\psi=2$，则由(7)式知：

$$[\psi_2]=[\psi_1]-[\psi_0]-1=q-p-1=p=[\psi_0],$$

$$[\psi_3]=-2-[\psi_0]=-2-p=q=[\psi_1].$$

这表明 $p=q=-1$，这与假设相矛盾，因此 $\Omega\psi=6$. 设 $(s,t)\neq(1/2,1/2)$，若 6 是 ψ 的周期，则由(19)式知，$\langle\psi_6\rangle=1-s=s=\langle\psi_0\rangle$，$\langle\psi_7\rangle=1-t=t=\langle\psi_1\rangle$，即 $s=t=1/2$，这与假设矛盾，因此 ψ 的周期是 12.

下面考虑 $(s,t)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$. 设 $(s,t)=(1/2,0)$，由(12)式得

$$(\psi_6,\psi_7)=([\psi_0]+1-\langle\psi_0\rangle,[\psi_1])=(p+1/2,q)=(\psi_0,\psi_1),$$

即 6 是 ψ 的周期. 设 3 也是 ψ 的周期，由(8)式得 $[\psi_3]=-1-[\psi_0]=-1-p=p=[\psi_0]$，这显然不可能，因此 1 和 3 都不是 ψ 的周期. 若设 2 是 ψ 的周期，则由(3)式得 $[\psi_2]=[\psi_1]-\psi_0=q-p-1/2=p+1/2=\psi_0$. 再由(8)式得 $[\psi_3]=-1-[\psi_0]=-1-p=q=[\psi_1]$. 显然 $3p=-2$ 是不可能的，因此 ψ 的周期是 6. 当 $(s,t)=(0,1/2)$ 时，用相同的方法可证明 ψ 的周期是 6. 最后，设 $(s,t)\in\Gamma_1\backslash\{(1/2,0)\}$ 或 $\Gamma_2\backslash\{(0,1/2)\}$. 由之前的讨论知，6 不是 ψ 的周期. 假设 $\Omega\psi=4$，若 $(s,t)\in\Gamma_1\backslash\{(1/2,0)\}$，则 $s>0$，$t=0$. 由(11)式得 $(\langle\psi_1\rangle,\langle\psi_2\rangle)\in\Gamma_2$ 和 $(\langle\psi_2\rangle,\langle\psi_3\rangle)\in\Gamma_1$，由(3)式得

$$\psi_2=[\psi_1]-\psi_0=q-p-s=q-p-1+(1-s)=[\psi_2]+\langle\psi_2\rangle,$$

即 $\langle\psi_2\rangle=1-s$. 因此由(13)式得：

$$\psi_4=-[\psi_1]-\langle\psi_2\rangle=-q-\langle\psi_2\rangle=-q-1+s=p+s=\psi_0,$$

$$\psi_5=-1-[\psi_2]=-1-q+p+1=p-q=q=\psi_1.$$

于是 $q=-1/3$，这与假设相矛盾，因此 ψ 的周期是 12. 当 $(s,t)\in\Gamma_2\backslash\{(0,1/2)\}$ 时，可用相同方法处理. 证毕.

1.2 讨论如下非线性三项递推关系

$$\varphi_{k-1}+\varphi_k+\varphi_{k+1}=[\varphi_k],\ k\in\mathbf{Z}. \tag{20}$$

(20)式的解是指实序列 $\varphi=\{\varphi_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 经过置换后可使(20)式成为恒等式.显然(20)式可以改写为:

$$\varphi_{k+1}=[\varphi_k]-(\varphi_k+\varphi_{k-1}), \tag{21}$$

$$\varphi_{k-1}=[\varphi_k]-(\varphi_k+\varphi_{k+1}). \tag{22}$$

由此可知(20)式的解 φ 是由任意两个连续项(φ_k,φ_{k+1})唯一决定的.特别地,φ 是(20)式的整数解,当且仅当对任意 $k\in\mathbf{Z}$, φ_k 和 φ_{k+1} 是整数.下面定义 3 个集合:$\Upsilon_0=\{0\}$, $\Upsilon_1=(0,1]$ 和 $\Upsilon_1=(1,2)$.根据高斯取整函数的性质,易得如下引理.

引理 4 设 φ 是(20)式的解,若存在 $m\in\mathbf{Z}$,使得 $\langle\varphi_m\rangle+\langle\varphi_{m+1}\rangle\in\Upsilon_{\sigma\in\{0,1,2\}}$,则对任意 $n\in\mathbf{Z}$,

$$\langle\varphi_n\rangle+\langle\varphi_{n+1}\rangle+\langle\varphi_{n+2}\rangle=-([\varphi_n]+[\varphi_{n+2}])=\sigma. \tag{23}$$

证明 不失一般性,令 $m=0$.由(20)式知

$$\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle=\varphi_2+\varphi_1+\varphi_0-([\varphi_2]+[\varphi_1]+[\varphi_0])=$$
$$([\varphi_1]-\varphi_1-\varphi_0)+\varphi_1+\varphi_0-([\varphi_2]+[\varphi_1]+[\varphi_0])=-([\varphi_2]+[\varphi_0]). \tag{24}$$

对任意 $k\in\mathbf{Z}$, $\langle\varphi_k\rangle\in[0,1)$ 且 $[\varphi_2]+[\varphi_0]$ 是整数的.$(\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle)\in[0,3)$ 表明 $\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle\in\{0,1,2\}$.由(20)式有

$$\langle\varphi_2\rangle=\langle[\varphi_1]-\varphi_1-\varphi_0\rangle=\langle[\varphi_1]-[\varphi_1]-[\varphi_0]-\langle\varphi_1\rangle-\langle\varphi_0\rangle\rangle=\langle-\langle\varphi_1\rangle-\langle\varphi_0\rangle\rangle. \tag{25}$$

假设$(\langle\varphi_0\rangle+\langle\varphi_1\rangle)\in\Upsilon_{\sigma\in\{0,1,2\}}$,若 $\sigma=0$,则 $\langle\varphi_0\rangle=\langle\varphi_1\rangle=0$.再由(25)式得 $\langle\varphi_2\rangle=0$.因此,$\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle=0$.另外,由归纳可知,对任意 $n\in\mathbf{Z}$,有 $\langle\varphi_n\rangle=0$,即对任意 $n\in\mathbf{Z}$,有 $\langle\varphi_n\rangle+\langle\varphi_{n+1}\rangle=0$.假设 $\sigma=1$ 或 2,由前面的讨论知 $\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle=1$ 或 2.假设 $\sigma=1$,则 $\langle\varphi_0\rangle+\langle\varphi_1\rangle\in(0,1]$,即 $2-\langle\varphi_0\rangle-\langle\varphi_1\rangle\in(1,2]$.因此,若 $\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle=2$,由前面的讨论知 $\langle\varphi_2\rangle\in[1,2)$ 是不可能的.因此 $\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle=1$.注意到 $0<1-\langle\varphi_1\rangle\leqslant1$,这表明 $\langle\varphi_2\rangle+\langle\varphi_1\rangle=(1-\langle\varphi_1\rangle)\in(0,1]$.因此,通过归纳可知,当 $\sigma=1$ 时,(23)式成立.$\sigma=2$ 时的讨论可类似地进行.证毕.

引理 5 (20)式的任意整数解 φ 是周期的且周期为 4.另外,存在 $k\in\mathbf{Z}$,若 $\varphi_k=\varphi_{k+1}=0$,则 $\varphi=\{0\}$;否则,φ 的周期是 4.

证明 令 φ 是(20)式的整数解.为了简便,令 $k=0$, $(\varphi_0,\varphi_1)=(p,q)$,其中 $p,q\in\mathbf{Z}$.易知对任意 $m\in\mathbf{Z}$, $(\langle\varphi_m\rangle+\langle\varphi_{m+1}\rangle)\in\Upsilon_0$.因此,由(7)式得:$[\varphi_2]=-[\varphi_0]=-p=\varphi_2$, $[\varphi_3]=-[\varphi_1]=-q=\varphi_3$, $[\varphi_4]=-[\varphi_2]=-(-p)=p=\varphi_4$, $[\varphi_5]=-[\varphi_3]=-(-q)=q=\varphi_5$.这表明 4 是 φ 的周期.设 2 是 φ 的周期,则由 $\varphi_2=-p=p=\varphi_0$ 和 $\varphi_3=-q=q=\varphi_1$,得 $p=q=0$.因此有 $\varphi=\{0\}$,即 $\Omega\varphi=1$.总之,若 $p=q=0$,则 φ 的周期是 1;否则,φ 的周期是 4.证毕.

定理 2 对(20)式的任意解 φ,存在 $k\in\mathbf{Z}$,有 $\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle\in\Upsilon_0\cup\Upsilon_1\cup\Upsilon_2$ 且 φ 是周期的,其周期为 12,并有如下结论:

(i) 设 $\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle\in\Upsilon_0$,则 φ 是整数解且 $\Omega\varphi=\begin{cases}1,\ \varphi_k=\varphi_{k+1}=0,\\4,\ \text{其他}.\end{cases}$

(ii) 设 $\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle\in\Upsilon_1\cup\Upsilon_2$,则 φ 是非整数解.若 $\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle\in\Upsilon_2$, $[\varphi_k]=[\varphi_{k+1}]=-1$,则 $\Omega\varphi=\begin{cases}1,\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)=(1/3,1/3),\\3,\ (\langle\varphi_k\rangle,\langle\varphi_{k+1}\rangle)\neq(1/3,1/3);\end{cases}$ 否则,$\Omega\varphi=12$.

证明 首先由引理 2 知(i)是正确的.下面讨论结论(ii).令 φ 是(20)式的非整数解,对任意 $k\in\mathbf{Z}$,有 $\langle\varphi_k\rangle\neq0$ 或 $\langle\varphi_{k+1}\rangle\neq0$,即$(\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\Upsilon_1\cup\Upsilon_2$.由(20)式得

$$\varphi_{k+3}=[\varphi_{k+2}]-(\varphi_{k+2}+\varphi_{k+1})=[\varphi_{k+2}]-([\varphi_{k+1}]-\varphi_{k+1}-\varphi_k+\varphi_{k+1})=[\varphi_{k+2}]-[\varphi_{k+1}]+\varphi_k. \tag{26}$$

令 $(\langle\varphi_k\rangle+\langle\varphi_{k+1}\rangle)\in\Upsilon_\sigma$，其中 $k=1$ 或 2. 则由(23) 式得

$$\begin{aligned}\varphi_{k+6}&=[\varphi_{k+5}]-[\varphi_{k+4}]+\varphi_{k+3}=[\varphi_{k+5}]-[\varphi_{k+4}]+[\varphi_{k+2}]-[\varphi_{k+1}]+\varphi_k=\\&(-[\varphi_{k+3}]-\sigma)-(-[\varphi_{k+2}]-\sigma)+[\varphi_{k+2}]-[\varphi_{k+1}]+\varphi_k=\\&-[\varphi_{k+3}]+[\varphi_{k+2}]+[\varphi_{k+2}]-[\varphi_{k+1}]+\varphi_k=\\&-(-[\varphi_{k+1}]-\sigma)+(-[\varphi_k]-\sigma)+[\varphi_{k+2}]-[\varphi_{k+1}]+\varphi_k=[\varphi_{k+2}]-[\varphi_k]+\varphi_k.\end{aligned}\tag{27}$$

再由(23) 式得

$$\begin{aligned}[\varphi_{k+8}]-[\varphi_{k+6}]&=(-[\varphi_{k+6}]-\sigma)-(-[\varphi_{k+4}]-\sigma)=[\varphi_{k+4}]-[\varphi_{k+6}]=\\&(-[\varphi_{k+2}]-\sigma)-(-[\varphi_{k+4}]-\sigma)=(-[\varphi_{k+2}]-\sigma)-(-[\varphi_k]-\sigma)=[\varphi_k]-[\varphi_{k+2}],\end{aligned}$$

于是有 $\varphi_{k+12}=[\varphi_{k+8}]-[\varphi_{k+6}]+\varphi_{k+6}=[\varphi_k]-[\varphi_{k+2}]+[\varphi_{k+2}]-[\varphi_k]+\varphi_k=\varphi_k$. 类似地，可得 $\varphi_{k+13}=\varphi_{k+1}$. 因此 $(\varphi_{k+12},\varphi_{k+13})=(\varphi_k,\varphi_{k+1})$，即 12 是 φ 的周期.

下面再讨论 $\Omega\varphi$. 不失一般性，令 $k=0$，$([\varphi_0],[\varphi_1])=(p,q)$，$(\langle\varphi_0\rangle,\langle\varphi_1\rangle)=(s,t)$. 由前面的讨论知 φ 是周期的，且周期为 12.

(a) 假设 $s+t\in\Upsilon_1$. 由(23) 式可得 $\langle\varphi_2\rangle=1-(\langle\varphi_1\rangle+\langle\varphi_0\rangle)=1-s-t$，$[\varphi_2]=-1-[\varphi_0]=-1-p$. 若 6 是 φ 的周期，则由(27) 式可得 $\varphi_6=[\varphi_2]-[\varphi_0]+\varphi_0=-1-p-p+p+s=s-1-2p=p+s=\varphi_0$. 因此 $p=-1/3$ 是不可能的. 所以，φ 的周期为 12.

(b) 设 $s+t\in\Upsilon_2$. 由(23) 式知 $\langle\varphi_2\rangle=2-s-t$，$[\varphi_2]=-2-p$. 类似地可得 $[\varphi_3]=-2-q$. 设 $p=q=-1$，则 $[\varphi_2]=-1$. 再由(26) 式得 $\varphi_3=[\varphi_2]-[\varphi_1]+\varphi_0=-1+1+\varphi_0=\varphi_0$，$\varphi_4=[\varphi_3]-[\varphi_1]+\varphi_1=-1+1+\varphi_1=\varphi_1$. 这表明 φ 的周期是 3. 设 $\Omega\varphi=1$，则 $\langle\varphi_0\rangle=s=t=\langle\varphi_1\rangle$，$\langle\varphi_2\rangle=2-s-t=s=\langle\varphi_0\rangle$. 由此可知 $s=t=1/3$，即若 $s=t=1/3$，则 $\Omega\varphi=1$；否则，φ 的周期是 3. 设 $p\neq-1$ 或 $q\neq-1$，则由前面的讨论和(27) 式可知 $\varphi_6=[\varphi_2]-[\varphi_0]+\varphi_0=-2-p-p+p+s=s-p-2$. 再由(20) 式得 $\varphi_7=[\varphi_3]-[\varphi_1]+\varphi_1=-2-q-q+q+t=t-q-2$. 假设 6 是 φ 的周期，则有 $[\varphi_6]=-p-2=p=[\varphi_1]$，$[\varphi_7]=-q-2=q=[\varphi_1]$. 由此可知 $p=q=-1$，这与前面的讨论结果相矛盾，因此 $\Omega\varphi=12$. 证毕.

参考文献：

[1] Chang Y C, Wang G Q, Cheng S S. Complete set of periodic solutions of a discontinuous recurrence equation[J]. J Difference Eq Appl, 2012, 18: 1133-1162.

[2] Chang Y C, Cheng S S. Complete periodic behaviours of real and complex bang bang dynamical systems[J]. J Differecne Eq Appl, to appear.

[3] Chang Y C, Cheng S S. Complete periodicity analysis for a discontinuous recurrence equation[J]. Int J Bifurcation Chaos, 2013, 23(4): 1-34.

[4] Chang Y C, Wang G Q. Generators for nonlinear three term recurrences involving the greatest integer function[J]. Applied Mathematics E-Notes, 2011, 11: 73-81.

[5] Groove E A, Ladas G. Periodicities in Nonlinear Difference Equations[M]. Chap-man and Hall/CRC, 2004.