

文章编号: 1004-4353(2013)03-0199-03

扭摆法测量刚体转动惯量的误差定量分析

申惠娟¹, 陈锺贤²

(1. 闽南理工学院 基础部, 福建 石狮 362700; 2. 哈尔滨工业大学 物理系, 黑龙江 哈尔滨 150000)

摘要: 以圆柱形刚体为研究对象, 推导了刚体轴线与仪器转轴不重合情况下的转动惯量误差表达式, 进一步给出了均匀细棒和均匀薄圆盘的误差表达式, 且定量地给出了误差, 并对其结果进行了分析, 为改进测量方法及实际应用提供了理论依据。
关键词: 转动惯量; 扭摆法; 误差定量分析
中图分类号: O313. 3 **文献标识码:** A

Quantitative error analysis for moment of inertia
using torsion pendulum method

SHEN Huijuan¹, CHEN Zhongxian²

(1. Foundation Department, Minnan University of Science and Technology, Shishi 362700, China;
2. Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150000, China)

Abstract: We calculated the moment of inertia while axes of rigid-body wasn't coincide with instruments based on the columniform rigid-body. The conclusion can be used to uniform thin stick and disc by proximate way. And the concludes was discussed, which can be used to improve the measure method and promote the practice application.
Key words: moment of inertia; torsion pendulum method; quantitative analysis

转动惯量是描述刚体转动惯性大小的量度, 其量值取决于物体的形状、质量分布及转轴的位置^[1]. 刚体的转动惯量有着重要的物理意义, 在航天、电力、机械、仪表等领域也是一个重要的参量. 扭摆法是测量刚体转动惯量的常用方法, 但在实验中由于摆角太大、弹簧回复力减弱^[2-3]、计时误差^[4]、转盘放置不平衡或者待测刚体放置不当^[2]等因素往往会产生很大误差, 其中因待测刚体放置不当而产生的误差是实验中较为容易出现的, 且很多误差由于设备制作工艺问题而无法修正和避免, 因此有必要通过精确的理论推导给出具体的误差表达式. 本文以圆柱体为例, 推导出由于圆柱体放置倾斜导致的刚体轴线与仪器转轴不重合

(如图 1(a)所示)所产生的转动惯量误差表达式, 并进一步推导出细棒和圆盘的误差表达式. 实验示意图如图 1(b)所示.

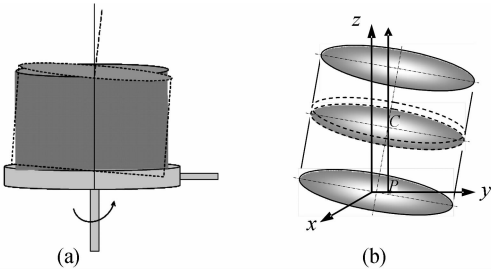


图 1 (a)为圆柱体放置倾斜(图中虚线部分)导致刚体轴线与仪器转轴不重合的示意图; (b)为图(a)所对应的实验示意图

1 推导过程

1) 细圆环对过环心且垂直于环面转轴的转动惯量. 设圆环的半径为 r , 宽度为 dr , 厚度为 dh , 则圆环的质量 $dm = 2\pi r \rho dh dr$, 且对中心轴线 z 的转动惯量 $dJ_z = 2\pi r^3 \rho dh dr$, 对 x 轴和 y 轴的转动惯量 $dJ_x = dJ_y = \pi r^3 \rho dh dr$.

2) 令圆环绕 x 轴转过一小角度 θ (如图 2 所示), 求此时该圆环对 z 轴的转动惯量. 将其投影到 OXY 平面, 其投影曲线为椭圆 (图 3), 其对 x 轴的转动惯量为 $dJ'_x = dJ_x = \pi r^3 \rho dh dr$, 其对 y 轴的转动惯量为 $dJ'_y = \pi r^3 \rho dh \cos^2 \theta dr$, 由垂直轴定理可得其对 z 轴的转动惯量为 $dJ'_z = \pi r^3 \rho dh (1 + \cos^2 \theta) dr$.

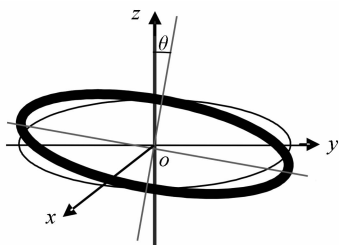


图 2 令圆环绕 x 轴转过一小角度 θ 的示意图

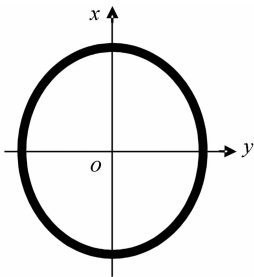


图 3 绕 x 轴旋转后的圆环投影到 OXY 平面后的椭圆图

3) 计算倾斜 θ 角度后圆盘对 z 轴的转动惯量. 设圆盘的半径为 R , 厚度为 dh , 则倾斜 θ 角度后对 z 轴的转动惯量为 $J'_z = \int_0^R \pi r^3 \rho dh (1 + \cos^2 \theta) dr$. 即

$$J'_z = \frac{1}{4} \pi R^4 \rho dh (1 + \cos^2 \theta). \quad (1)$$

设圆盘的质量为 m , 则 $J'_z = \frac{1}{4} m (1 + \cos^2 \theta) R^2$, 此为倾斜后的圆盘对转轴的转动惯量.

4) 计算倾斜 θ 角度后圆柱体对 z 轴的转动惯量. (1) 式即为图 1 中质量为 dm 的圆盘绕过质心的平行轴 PC 的转动惯量, 设所取质量元高度为 h , 则两平行轴间距 $\overline{OP} = h \sin \theta$. 根据平行轴定理,

质量元 dm 对 z 轴的转动惯量为 $dJ''_z = [\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) R^2 + (h \sin \theta)^2] \rho \pi R^2 dh$, 则圆柱体对 z 轴的转动惯量为 $J''_z = \rho \pi R^2 \int_0^h [\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) R^2 + (h \sin \theta)^2] dh$, 积分得 $J''_z = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) \rho \pi R^4 h + \frac{1}{3} \rho \pi R^2 h^3 \sin^2 \theta$.

5) 计算圆柱体放置不当面产生的误差. 设圆柱体的质量为 m , 则 $J''_z = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta) m R^2 + \frac{1}{3} m (h \sin \theta)^2$. 当转盘处在严格水平的状态下, 圆柱体对转轴的转动惯量为 $J_z = \frac{1}{2} m R^2$, 从而得由于载物盘放置不平衡所产生的转动惯量系统误差为 $\Delta J = J''_z - J_z = \frac{1}{3} m (h \sin \theta)^2 - \frac{1}{4} (1 - \cos^2 \theta) m R^2$, 即 $\Delta J = (\frac{1}{3} h^2 - \frac{1}{4} R^2) m \sin^2 \theta$. 当 $\theta = 0$ 时, $\Delta J = 0$, 由此证明计算结果是正确的.

2 结果与讨论

根据以上讨论, 得出均匀圆柱体中轴线与仪器转轴夹角 θ 在 $(0, 90^\circ)$ 时引入的系统误差为

$$\Delta J = (\frac{1}{3} h^2 - \frac{1}{4} R^2) m \sin^2 \theta,$$

式中 h 是圆柱体的高, R 是圆柱体的半径, m 是圆柱体的质量. 由此, 可以得到以下推论:

1) 当 $h > \frac{\sqrt{3}}{2} R$ 时, $\Delta J > 0$, 对细长杆, 可近

似地认为 $h \gg R$, 则 $\Delta J \approx \frac{1}{3} m h^2 \sin^2 \theta$. 即细长杆倾斜产生的误差与杆的质量、长度和倾斜角度有如下关系: 对同一根细杆, 随着倾角的增加, 仪器转轴的转动惯量增大, 且增量值以 $\sin^2 \theta$ 倍增加; 在倾角一定的情况下, 杆的长度越长或密度越大, 则转动惯量增量就越大.

2) 当 $h < \frac{\sqrt{3}}{2} R$ 时, $\Delta J < 0$, 对薄圆盘, 近似

地认为 $h \ll R$, 则 $\Delta J \approx -\frac{1}{4} m R^2 \sin^2 \theta$. 即薄圆盘由于倾斜引起的误差与圆盘的质量、半径及倾斜角度有如下关系: 对同一个圆盘, 随着倾角的增

加,仪器转轴的转动惯量减小,且减小的比例为 $\sin^2 \theta$; 同样倾角下,盘的半径越大或密度越大,则产生的损失就越多.

3) 当 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ 时, $\Delta J = 0$, 若圆柱体的高度和半径满足该尺寸比例,则会减少由于载物盘面的倾斜或圆柱体放置不平稳所产生的误差.

根据以上讨论结果可知:在用扭摆法测量刚体转动惯量时,应尽量使刚体的转轴和仪器转轴在一条直线上. 其次,在实验仪器的设计上,圆柱体刚体可以设置成半径和高度比为 $2 : \sqrt{3}$, 从而减小由于圆柱体放置不平衡带来的实验偏差; 均匀细长杆在杆的长度和材料密度上可以相应减

小,均匀薄圆盘的半径和材料密度也可以适当减小,从而减小实验测量误差.

参考文献:

- [1] 迟占铎,徐鑫莉,张心明. 扭摆法测转动惯量的误差分析[J]. 长春理工大学学报:自然科学版,2012,35(1):36-42.
- [2] 薄悦,卢志辉,张磊乐. 扭摆法测量转动惯量的误差分析与校准[J]. 计量技术,2011(8):21-23.
- [3] 池红岩,丁红伟. 关于扭摆法测转动惯量实验的改进[J]. 物理通报,2011(1):51-52.
- [4] 班丽瑛. 刚体转动惯量实验中影响阻力矩因素研究[J]. 煤矿机械,2006,27(4):603-604.
- [5] 马文蔚,周雨青,解希顺. 物理学教程[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2006:92-99.

—————
(上接第 198 页)

- [2] Ye L, Guo G C. Probabilistic teleportation of an unknown atomic state[J]. Chin Phys, 2002,11(10):996-998.
- [3] Zhou L, Kuang L M. Linear optical implementation for quantum teleportation of unknown two qubit entangled states[J]. Chin Phys Lett, 2004,21(11):2101-2104.
- [4] 计新. 利用腔 QED 技术实现特殊三粒子 W 态的隐形传送[J]. 延边大学学报:自然科学版,2011,37(3):234-237.
- [5] Yan F L, Wang D. Probabilistic and controlled teleportation of unknown quantum states[J]. Phys Lett A, 2003,316(5):297-303.
- [6] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one and two particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Phys Rev Lett, 1992,69:2881-2884.
- [7] Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P G, et al. Dense coding in experimental quantum communication[J]. Phys Rev Lett, 1996,76(25):4656-4659.
- [8] Hiroshima T. Optimal dense coding with mixed state entanglement[J]. J Phys A: Math Gen, 2001,34:6907-6912.
- [9] Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. Phys Rev Lett, 1991,67:661-663.
- [10] 李哲奎. 基于纠缠交换的三方量子安全直接通信[J]. 延边大学学报:自然科学版,2007,33(4):249-252.
- [11] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete[J]. Phys Rev, 1935,47(10):777-780.
- [12] Cereceda J L. Quantum dense coding using three qubits[J]. Quant-Ph/0105096.
- [13] 冷春玲,计新. 基于法拉第旋转的 GHZ 态制备[J]. 延边大学学报:自然科学版,2013,39(2):112-115.
- [14] Zhang X L, Gao K L, Feng M. Preparation of cluster states and W states with superconducting quantum-interference-device qubits in cavity QED[J]. Phys Rev A, 2006,74(2):024303.
- [15] Briegel H J, Raussendorf R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles[J]. Phys Rev Lett, 2001,86:910-913.
- [16] Zhang X L, Gao K L, Feng M. Efficient and high fidelity generation of atomic cluster states with cavity QED and linear optics[J]. Phys Rev A, 2007,75(3):034308.
- [17] Yang W X, Zhan Z M, Li J H. Efficient scheme for multipartite entanglement and quantum information processing with trapped ions[J]. Phys Rev A, 2005,72:062108.
- [18] Dong P, Xue Z Y, Yang M, et al. Generation of cluster states[J]. Phys Rev A, 2006,73:033818.
- [19] 明莹. 利用单模腔和原子的共振相互作用制备团簇态与 GHZ 态[D]. 延吉:延边大学,2007.
- [20] Julsgaard B, Kozhekin A, Polzik E S. Experimental long-lived entanglement of two macroscopic objects[J]. London: Nature, 2001,413:400-403.