文章编号：1004-4353(2013)03-0183-02

求 Boussinesq 方程孤子解的新方法

张聚梅[1]， 王洪伦[2]， 黄利国[1]
（1.滨州学院 数学与信息科学系，山东 滨州 256603；2.滨州技术学院 电子信息工程系，山东 滨州 256603）

摘要：探讨了利用双线性导数法求 Boussinesq 方程孤子解的新方法. 首先通过非线性函数变换，给出 4 阶 Boussinesq 方程的双线性导数形式，然后利用待定系数法求出了方程的孤子解. 此方法可用于研究一大类非线性发展方程.

关键词：Boussinesq 方程；孤子解；双线性导数
中图分类号：O175.24 **文献标识码**：A

A new method for the soliton solution of Boussinesq equation

ZHANG Jumei[1]， WANG Honglun[2]， HUANG Liguo[1]
(1. *Department of Mathematics and Information Science*, *Binzhou University*, *Binzhou* 256603, *China*;
2. *Department of Electronic Information Engineering*, *Binzhou Technical College*, *Binzhou* 256603, *China*)

Abstract: We consider to solve soliton solution of Boussinesq equation by using bilinear derivative method. Fristly, the four-ordered bilinear derivative form of Boussinesq equation is given by a nonlinear function transformation. Then, the soliton solution of the Boussinesq equation is given using method of undetermined coefficients and the truncated technique. The method can be generalized to the study of a class of nonlinear evolution equations.

Key words: Boussinesq equation; soliton solution; bilinear derivative

非线性发展方程广泛应用于物理学、工程学和生物学等各领域. 随着计算机技术和非线性科学的不断发展，在非线性孤立子理论中，研究者已提出许多求解非线性发展方程的方法，如分离变量法、反散射法、Backlund 变换法、Hirota 双线性导数法等. Hirota 双线性导数法是求得 Lax 可积函数方程孤子解的重要方法[1-4]，其关键是对所考察的方程做一个变换，使方程能写成双线性形式，然后利用双线性导数特有的性质和截断技术，得到指数多项式形式的解. 本文探讨了利用双线性导数法求 Boussinesq 方程 ($u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}-3(u^2)_{xx}=0$) 的孤子解的一个新方法.

1 基础知识

设函数 $f(t,x)$ 是变量 t 与 x 的可微函数，引进微分算子 D_t 和 D_x，使得对任意的非负整数 m 和 n 有

$$D_t^m D_x^n f\cdot g=(\partial_t-\partial_{t'})^m(\partial_x-\partial_{x'})^n f(t,x)g(t',x')\,|_{t=t',x=x'}. \tag{1}$$

式(1) 称为函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 对 t 施行 m 次 D_t，对 x 施行 n 次 D_x 的双线性导数. 双线性导函数具有以下主要性质[5-8]：1) 函数 $f(t,x)$ 与自身的奇数次双线性导数为零，即 $m+n$ 为奇数时，$D_t^m D_x^n f\cdot f=0$；2) 对换函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 的双线性导数的顺序，当导数是偶次时其值不变，而导数是奇数次时要改变符号；3) 函数 $f(t,x)$ 与数 1 的双线性导数是通常的导数，即 $D_t^m D_x^n f\cdot 1=\partial_t^m\partial_x^n f$；4) 两个线性指数函数的双线性导数等于指数相加的线性指数函数的适当倍数.

收稿日期：2012－11－30 **基金项目**：滨州学院科研基金资助项目(BZXYL1207)
作者简介：张聚梅(1981—)，女，讲师，研究方向为孤立子理论.

2 Boussinesq 方程的孤子解

对 Boussinesq 方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxxx}-3(u^2)_{xx}=0, \tag{2}$$

实施变换 $u=2(\ln f)_{xx}$,则有

$$(\ln f)_x=\frac{f_x}{f},\quad (\ln f)_{xx}=(\frac{f_x}{f})_x=\frac{f_{xx}f-f_x^2}{f^2},\quad u=2(\ln f)_{xx}=2\cdot\frac{f_{xx}f-f_x^2}{f^2},$$

$$u_t=\frac{2f_{xxt}f^3-4f_{xt}f_xf^2-2f_{xx}f_tf^2+4f_x^2f_tf}{f^4},\qquad u_x=\frac{2f_{xxx}f^3-6f_xf_{xx}f^2+4f_x^3f}{f^4},$$

$$u_{xx}=\frac{2f_{xxxx}}{f}-\frac{6^2f_{xx}}{f^2}-\frac{8f_{xxx}f_x}{f^2}+\frac{24f_{xx}f_x^2}{f^4}-\frac{12f_x^4}{f^4},$$

$$u_{xxx}=\frac{2f_{xxxxx}}{f^2}-\frac{10f_{xxxx}f_x}{f^2}-\frac{20f_{xxx}f_{xx}}{f^2}+\frac{12f_{xx}^2f_x}{f^3}+\frac{16f_{xxx}f_{xx}^2}{f^3}+\frac{24f_{xxx}f_x^2}{f^4}+\frac{48f_{xx}^2f_x}{f^4}-\frac{96f_{xx}f_x^3}{f^5}-\frac{48f_{xx}f_x^3}{f^4}+\frac{48f_x^5}{f^5},$$

$\cdots.$

将以上各式带入方程(2),并对方程求两次关于 x 的积分,假设每次积分常数都为零,则方程最终化为

$$-f_t^2\cdot f^2+f^3\cdot f_{tt}+f^2\cdot f_x^2+3f_x^4-f^3f_{xx}-6f\cdot f_x^2f_{xx}+4f^2\cdot f_xf_{xxx}-f^3\cdot f_{xxxx}=0.$$

综合双线性导数的定义及性质,上式可写成双线性方程

$$(D_t^2-D_x^2-D_x^4)f\cdot f=0. \tag{3}$$

为求得上述方程的解,令 $f(t,x)=1+f^1\varepsilon+f^2\varepsilon^2+f^3\varepsilon^3+\cdots+f^j\varepsilon^j+\cdots$,并带入方程(3),然后比较 ε 的各幂次的系数:

$$(D_t^2-D_x^2-D_x^4)f\cdot f=(D_t^2-D_x^2-D_x^4)(1+f^1\varepsilon+f^2\varepsilon^2+f^3\varepsilon^3+\cdots+f^j\varepsilon^j+\cdots)\cdot(1+f^1\varepsilon+f^2\varepsilon^2+f^3\varepsilon^3+\cdots+f^j\varepsilon^j+\cdots),$$

$o(1)\quad 0=0,$

$$o(\varepsilon)\quad 2(\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_x^4)f^1=0, \tag{4}$$

$$o(\varepsilon^2)\quad 2(\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_x^4)f^2=-(D_t^2-D_x^2-D_x^4)f^1\cdot f^1, \tag{5}$$

$$o(\varepsilon^3)\quad 2(\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_x^4)f^3=-2(D_t^2-D_x^2-D_x^4)f^1\cdot f^2, \tag{6}$$

$\cdots.$

从(4)式知 f^1 有线性指数函数形式的解:$f^1=e^{\eta_1}$,$\eta_1=\omega_1t+k_1x+\eta^0$,$\omega_1=k_1^4+k_1^2$.将 f^1 带入(5)式,根据双线性导数的性质得$(\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_x^4)f^2=0$.若取 $f^2=0$,则由(6)式有$(\partial_t^2-\partial_x^2-\partial_x^4)f^3=0$,故得 $f^3=0$. 继续推理可知 $f^4=f^5=\cdots=0$,由此级数 $f(t,x)=1+f^1\varepsilon+f^2\varepsilon^2+f^3\varepsilon^3+\cdots+f^j\varepsilon^j+\cdots$ 被截断而取有限形式.不妨取 $\varepsilon=1$,则有 $f(t,x)=1+e^{\eta_1}$,从而方程(2)有孤子解 $u=2[\ln(1+e^{\eta_1})]_{xx}=k_1^2/[1+\cosh(k_1x+\omega_1t+\eta^0)]$.

参考文献:

[1] 石玉仁,周志刚,张娟,等.修正 cKdV 方程组的孤立波结构及其稳定性[J].计算物理,2012,29(2):250-256.
[2] 张大军,邓淑芳,陈登远.mKdV-Sineordon 方程的多孤子解[J].数学物理学报,2004,25(6):257-264.
[3] 陶司兴,夏铁成.超 Broer-Kaup-Kupershmidt 族的双非线性化[J].数学年刊,2012,33A(2):217-228.
[4] Hirota R, Satsuma H J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation[J]. Phys Lett A, 1981,85:407-408.
[5] 程崇庆,孙义燧.哈密尔顿系统中的有序与无序运动[M].上海:上海科技教育出版社,1999:23-25.
[6] 郭柏灵.非线性演化方程[M].上海:上海科技教育出版社,1999:109-113.
[7] 李翊神.孤子与可积系统[M].上海:上海科技教育出版社,1999:65-70.
[8] 陈登远.孤子引论[M].北京:科学出版社,2006:14-15.