

文章编号: 1004-4353(2013)03-0179-04

半平面上有限级 Dirichlet 级数 关于型函数的增长级

南 华

(延边大学理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 利用型函数研究了半平面上有限级 Dirichlet 级数的增长级. 在一般指数条件下, 得到了其系数和增长级之间的重要关系, 拓展了半平面上有限级 Dirichlet 级数的增长性的研究范围.

关键词: Dirichlet 级数; 型函数; 级; 最大模

中图分类号: O174.5

文献标识码: A

The growth of finite-order Dirichlet series about the type-function on the half-plane

NAN Hua

(Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: The growth of the finite-order series on the half-plane are studied by using the type-function. Under the general exponential condition, the relations between the order on the type-function and coefficients of Dirichlet series are obtained. And the research scope of the growth of the Dirichlet series on the half-plane is promoted.

Key words: Dirichlet series; type-function; order; maximum modulus

半平面和全平面上 Dirichlet 级数的增长性是解析函数论中的一个基本问题, 学者们对此进行了较多研究, 并取得了很多成果^[1-4]. 例如, 文献[2]通过引进型函数研究了全平面上有限级 Dirichlet 级数的精确级与系数的关系, 文献[4]利用型函数研究了全平面上 Dirichlet 级数的下级增长性. 本文在一般的指数条件下, 利用 Dirichlet 级数关于型函数的级研究半平面上有限级的 Dirichlet 级数的增长级.

考虑 Dirichlet 级数

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (1)$$

其中: $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbf{R}$) 表示复变量, $\{a_n\}$ 为常复数列, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \uparrow +\infty$. 设级数(1) 满足

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \quad (2)$$

则级数(1) 的收敛横坐标 σ_c 与绝对收敛横坐标 σ_a 均为 0, 因此 $f(s)$ 在右半平面 $\text{Res} > 0$ 内是解析的.

$f(s)$ 的最大模、最大项和最大指标为: $M(\sigma) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \{ |f(\sigma + it)| \}$, $m(\sigma) = \max_{n \in \mathbf{N}} \{ |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \}$,

$\lambda_{n(\sigma)} = \max\{\lambda_n : |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = m(\sigma)\}$. $f(s)$ 在右半平面 $\operatorname{Re} s > 0$ 内的上级 $\rho = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ M(\sigma)}{-\ln \sigma}$, 下级 $\tau = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ M(\sigma)}{-\ln \sigma}$, 这里 $\sigma > 0$, $\ln^+ x = \begin{cases} \ln x, & x > 1; \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$ 当 $\rho = 0$, $0 < \rho < +\infty$ 时, 级数(1) 分别称为零级、有限级 Dirichlet 级数.

1 基本概念及引理

定义 1^[5] 对有限级级数(1), 引进函数 $U(r) = r^{\rho(r)} (r = \frac{1}{\sigma})$, 其中 $\rho(r)$ 在 $r \geq r_0$ 上非负、连续、单调, 且满足: ① $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$; ② $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r) r \ln r = 0$; ③ 对每个正数 k 有 $U(kr) = [k^\rho + o(1)]U(r) (r \rightarrow \infty)$, 并且当 $r \geq r'_0 \geq r_0$ 时, $U(r)$ 为 r 的增函数, 则称函数 $U(r)$ 为级数(1) 的型函数.

有限级级数 $f(s)$ 关于型函数 $U(r)$ 的级为 $\alpha = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ M(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})}$. 关于有限级 Dirichlet 级数及型函数,

文献[6] 给出以下结果:

定理 1 设有限级 Dirichlet 级数(1) 满足关系式(2) 和条件 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = D < +\infty$, 则

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ M(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})} = \alpha \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{W(\lambda_n) \ln^+ |a_n|}{\lambda_n} = \frac{1 + \rho_\alpha^{\frac{1}{1+\rho}}}{\rho^{\frac{\rho}{1+\rho}}},$$

其中 $0 < \alpha < +\infty$, $r = W(t)$ 是 $t = rU(r)$ 的反函数.

文献[1] 给出如下结果:

定理 2 设 $U(r)$ 是零级型函数, $r = \frac{1}{\sigma}$. 若 Dirichlet 级数(1) 满足条件(2) 和条件 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} = D < 1$,

$$\text{则 } \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln \ln M(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_{N_k}}{\ln U(\frac{\lambda_{N_k}}{\ln^+ |a_{N_k}|})} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})}.$$

引理 1^[6] 设 a 和 λ 是正的常数, 则 $\varphi(\sigma) = aU(\frac{1}{\sigma}) + \sigma\lambda (\sigma > 0)$ 在 $\sigma = \left[\frac{(a\rho)^{\frac{1}{\rho+1}}}{W(\lambda)} \right] (1 + o(1))$

($\lambda \rightarrow +\infty$) 时达到最小值: $a^{\frac{1}{\rho+1}} \frac{\rho+1}{\rho^{\frac{\rho}{\rho+1}}} \frac{\lambda}{W(\lambda)} (1 + o(1)) (\lambda \rightarrow +\infty)$, 其中 $r = W(t)$ 与 $t = rU(r)$ 互为反函数, 且 $W(kt) = k^{\frac{1}{\rho+1}} (1 + o(1))W(t)$, $t \rightarrow +\infty$, $0 < k < +\infty$.

引理 2^[6] 设 b, σ 是正的常数, 则 $\varphi(x) = b \frac{x}{W(x)} - \sigma x$ 在 $x = (\frac{b\rho}{\rho+1})^\rho \frac{1}{\sigma} U(\frac{1}{\sigma}) (1 + o(1)) (\sigma \rightarrow 0^+)$

时达到最大值: $\rho^\rho (\frac{b}{\rho+1})^{\rho+1} U(\frac{1}{\sigma}) (1 + o(1))$, $\sigma \rightarrow 0^+$.

由引理 2 容易得到:

引理 3 设 b, σ 是正的常数, 则 $\varphi(x) = \frac{x}{W(bx)} - \sigma x$ 在 $x = \frac{1}{b} (\frac{\rho}{\rho+1})^{\rho+1} \frac{1}{\sigma} U(\frac{1}{\sigma}) (1 + o(1))$

($\sigma \rightarrow 0^+$) 时达到最大值: $\frac{\rho^\rho}{b(\rho+1)^{\rho+1}} U(\frac{1}{\sigma}) (1 + o(1))$, $\sigma \rightarrow 0^+$.

引理 4^[5] 对于级数(1), 如果一致收敛横坐标 $\sigma_u < +\infty$, 那么 $|a_n| \leq M(\sigma) e^{\lambda_n \sigma} (\sigma > \sigma_u)$.

引理 5^[5] 对于级数(1), 如果一致收敛横坐标 $\sigma_u < +\infty$, 那么 $m(\sigma) \leq M(\sigma) (\sigma > \sigma_u)$.

2 主要结果及其证明

定理 3 若有限 ρ 级 Dirichlet 级数(1) 满足关系式(2), 且

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} < \frac{\rho}{1+\rho}, \quad (3)$$

$$\text{则 } \alpha = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ M(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})} \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |a_n|}{U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})} = \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} \alpha.$$

证明 充分性. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $\ln^+ |a_n| < (\alpha + \varepsilon) \times \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})$, 从而 $\lambda_n < (\alpha + \varepsilon) \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} \frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})$. 由于 $r = W(t)$ 是 $t = rU(r)$ 的反函数, 且都是单调增加函数, 故 $W(\frac{\lambda_n}{(\alpha + \varepsilon) \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho}}) \leq \frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|}$, 所以有 $\ln^+ |a_n| \leq$

$$\frac{\lambda_n}{W(\frac{\lambda_n}{(\alpha + \varepsilon) \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho}})}, \text{ 因此存在 } c > 0 \text{ 使得 } |a_0| < c, |a_n| \leq c \cdot \exp\left\{\frac{\lambda_n}{W(\frac{\lambda_n}{\alpha + \varepsilon \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho}})}\right\}, n \in \mathbf{N}^+.$$

于是有

$$M(\sigma) \leq c \cdot \sup_{n \geq 1} \left\{ \exp \left[\frac{\lambda_n}{W(\frac{\lambda_n}{\alpha + \varepsilon \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho}})} - \lambda_n (1 - \varepsilon) \sigma \right] \right\} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\varepsilon \sigma \lambda_n}. \quad (4)$$

由(3)式, 存在 $\nu > 0$ 和整数 $N_2 > 1$, 使得当 $n \geq N_2$ 时有 $\ln n < \lambda_n \frac{\rho}{\rho+1+\nu}$, $\lambda_n > (\ln n) \frac{\rho+1+\nu}{\rho} \geq \ln n$. 于是有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\varepsilon \sigma \lambda_n} \leq N_2 + \sum_{n=N_2}^{+\infty} e^{-\varepsilon \sigma \lambda_n} \leq N_2 + \sum_{n=N_2}^{+\infty} e^{-\varepsilon \sigma (\ln n) \frac{\rho+1+\nu}{\rho}} \leq N_2 + \sum_{n=N_2}^T e^{-\varepsilon \sigma \ln n} + \sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-2} \leq N_2 + \int_1^T x^{-\varepsilon \sigma} dx + C_1 \leq C_2 + \frac{T^{1-\varepsilon \sigma}}{1-\varepsilon \sigma}, \quad (5)$$

其中 $T = e^{\frac{2}{\varepsilon \sigma} \frac{\rho}{\rho+1+\nu}}$, C_1 为常数, $C_2 = N_2 + C_1$.

结合(4)式、(5)式和引理 3 有 $M(\sigma) \leq c \cdot \exp\{(\alpha + \varepsilon)(1 + o(1))U(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sigma})\}(C_2 + \frac{T^{1-\varepsilon \sigma}}{1-\varepsilon \sigma})$, 因此对于充分小的 σ 有 $\ln^+ M(\sigma) \leq c + (\alpha + \varepsilon)(1 + o(1))U(\frac{1}{(1-\varepsilon)\sigma}) + (1-\varepsilon \sigma)(\frac{2}{\varepsilon \sigma})^{\frac{\rho}{\rho+1+\nu}} \leq (\alpha + 3\varepsilon) \times$

$(1 + o(1))U(\frac{1}{\sigma})$, 故 $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ M(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})} \leq \alpha$. 假设 $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ M(\sigma)}{U(\frac{1}{\sigma})} = \alpha' < \alpha$, 取 $\varepsilon > 0$, 使 $\alpha' + 2\varepsilon < \alpha$, 则存在

$\sigma_0 > 0$, 使得当 $0 < \sigma < \sigma_0$ 时, $\ln^+ M(\sigma) < (\alpha' + \varepsilon)U(\frac{1}{\sigma})$. 于是由引理 4 得 $\ln^+ |a_n| < (\alpha' + \varepsilon)U(\frac{1}{\sigma}) +$

$\lambda_n \sigma$. 再由引理 1 知, 存在 $N_3 \in \mathbf{N}^+$, 当 $n > N_3$ 时有 $\ln^+ |a_n| \leq \frac{\lambda_n}{W(\lambda_n)} [\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} (\alpha' + \varepsilon)]^{\frac{1}{1+\rho}} (1 + \varepsilon)$,

即 $W(\lambda_n) \leq \frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} [\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} (\alpha' + \varepsilon)]^{\frac{1}{1+\rho}} (1 + \varepsilon)$. 因为 $W(x)$ 关于 $x > x_0 = r'_0 U(r'_0)$ 是单调增加的,

所以 $\lambda_n \leq \frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \cdot [\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} (\alpha' + \varepsilon)]^{\frac{1}{1+\rho}} (1 + \varepsilon) \cdot U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|}) \cdot [\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} (\alpha' + \varepsilon)]^{\frac{1}{1+\rho}} (1 + \varepsilon) \leq$

$\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} (\alpha' + \varepsilon) \frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|} \cdot (1 + \varepsilon)^{\rho+1} (1 + o(1)) \cdot U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})$, 故 $\frac{\ln^+ |a_n|}{\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})} \leq (\alpha' +$

$\varepsilon)(1 + \varepsilon)^{1+\rho} (1 + o(1))$, 从而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ |a_n|}{\frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^\rho} U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})} \leq \alpha' < \alpha$, 这与条件 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |a_n|}{U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})} =$

$\frac{\rho^\rho}{(1+\rho)^{1+\rho}}\alpha$ 相矛盾, 因此充分性得证.

必要性. 用反证法由充分性的证明易得, 故略.

定理 4 有限 ρ 级 Dirichlet 级数(1) 满足关系式(2) 和(3), 则

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ M(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} = A \Leftrightarrow \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ m(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} = A.$$

证明 假设 $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ m(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} = A$, 则 $\ln m(\sigma) \leq U^{A+o(1)}(\frac{1}{\sigma})$. 由(3) 式知存在 $\nu > 0$ 和整数 $N > 1$,

使得当 $n \geq N$ 时有 $\ln n < \lambda_n^{\frac{\rho}{\rho+1+\nu}}$, 即 $\lambda_n > (\ln n)^{\frac{\rho+1+\nu}{\rho}} \geq \ln n$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n \delta} &\leq N + \sum_{n=N}^{+\infty} e^{-\lambda_n \delta} \leq N + \sum_{n=N}^{+\infty} e^{-\delta (\ln n)^{\frac{\rho+1+\nu}{\rho}}} \leq N + \sum_{n=N}^T e^{-\delta \ln n} + \sum_{n=T+1}^{\infty} n^{-2} \leq \\ N + \int_1^T x^{-\delta} dx + C_1 &\leq C + \frac{T^{1-\delta}}{1-\delta}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $T = e^{(\frac{2}{\delta})^{\frac{\rho}{1+\nu}}}$, C 为常数. 记 $\Delta = \frac{\sigma \ln U(\frac{1}{\sigma})}{1 + \ln U(\frac{1}{\sigma})}$, $\delta = \sigma - \Delta = \frac{\sigma}{1 + \ln U(\frac{1}{\sigma})}$, 则由(6) 式可得 $M(\sigma) \leq$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \Delta} e^{-\lambda_n \delta} \leq m(\Delta) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n \delta} \right) \leq m(\Delta) \left(C + \frac{T^{1-\delta}}{1-\delta} \right),$$

其中 C 是一正常数. 于是有 $\ln M(\sigma) \leq \ln m(\Delta) + \ln C + (1-\delta) \ln T \leq U^{A+o(1)}(\frac{1}{\Delta}) + \ln C + (1-\delta) (\frac{2}{\delta})^{\frac{\rho}{1+\nu}}$. 再由有限级 Dirichlet 级数的型函数性质 ③ 得

$$\ln \ln M(\sigma) \leq (A + o(1)) \ln U(\frac{1}{\Delta}) = (A + o(1)) \left(\rho \ln \left(\frac{1 + \ln U(\frac{1}{\sigma})}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} \right) + \ln U(\frac{1}{\sigma}) \right),$$

从而 $\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ M(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} = A$, 再结合引理 5, 定理 4 得证.

根据定理 4, 应用类似于文献[1] 中的方法可以得到如下结果:

定理 5 设 Dirichlet 级数(1) 满足关系式(2) 和(3), 则

$$\alpha = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\ln^+ \ln^+ M(\sigma)}{\ln U(\frac{1}{\sigma})} \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ \lambda_n}{\ln U(\frac{\lambda_n}{\ln^+ |a_n|})} = \alpha.$$

参考文献:

- [1] 李云霞, 邓冠铁. 半平面上零级 Dirichlet 级数的增长性[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 2009, 45(2): 138-145.
- [2] 陈聚峰, 刘名生. 有限级 Dirichlet 级数及随机 Dirichlet 级数[J]. 数学物理学报, 2005, 25A(7): 965-973.
- [3] 南华. 无限级 Dirichlet 级数的值分布[J]. 延边大学学报: 自然科学版, 2012, 38(3): 183-186.
- [4] 杨祺, 田宏根. Dirichlet 级数和随机 Dirichlet 级数的下级的增长性[J]. 数学杂志, 2011, 31(6): 1079-1086.
- [5] 余家荣, 丁晓庆, 田范基. Dirichlet 级数与随机 Dirichlet 级数的值分布[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.
- [6] 余家荣. 随机 Dirichlet 级数的一些性质[J]. 数学学报, 1978, 21(2): 97-118.