文章编号: 1004-4353(2013)03-0167-05

一类高次分数阶微分方程正解的存在唯一性

杨慧， 王文霞
(太原师范学院 数学系，山西 太原 030012)

摘要: 研究 Caputo 型导数下的一类高次分数阶微分方程. 首先给出等价于微分方程解的积分形式，然后利用格林函数的性质和混合单调算子不动点理论证明了这类分数阶微分方程正解的存在唯一性.

关键词: Caputo 导数; Green 函数; 混合单调算子
中图分类号: O175.8　　**文献标识码:** A

Existence and uniqueness of the positive solution of a class of high-order fractional differential equation

YANG Hui， WANG Wenxia
(*Department of Mathematics*, *Taiyuan Normal University*, *Taiyuan* 030012, *China*)

Abstract: We study a class of high-order fractional differential equations involving Caputo fractional derivative. First we derive the integral form which is equivalent to the solution of differential equations, then existence and uniqueness theorem of the positive solution of the class of high-order fractional differential equation is given by using properties of the Green functions and the mixed monotone operator fixed point theory.

Key words: Caputo derivative; Green function; mixed monotone operator

分数阶微分方程在工程科学、流体力学等领域有着广泛的应用，因此受到国内外许多学者的关注. 文献[1-5]运用单调迭代技巧、上下解方法、拓扑度及不动点理论等研究了次数相对低的分数阶微分方程解的存在性问题，文献[6]研究了次数 $\alpha \in (3,4]$ 的一类奇异分数阶微分方程边值问题解的情况，文献[7] 研究了次数 $\alpha \in (n-1,n]$ 且 $n \geqslant 2$ 的 Riemann-Liouville 型具有奇异边值的分数阶微分方程的正解理论. 受以上文献的启发，本文采用混合型单调算子理论对如下方程(1) 的边值问题解的存在性与唯一性进行了讨论，推广了文献[8] 结论.

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha} u(t) + g(t,u(t)) = 0,\ 0 < t < 1; \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-3)}(0) = u^{(n-2)}(1) = u^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

方程(1) 中 $\alpha \in (n-1,n]$ 且 $n \geqslant 2$，并假设 $g(t,u): [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为连续函数，${}^{C}D_{0^+}^{\alpha}$ 为 Caputo 型分数阶导数.

1　预备知识

定义 1[8]　设 $h \in L^1([a,b],\mathbf{R}_+)$，函数 h 的 $\alpha\,(\alpha > 0)$ 次分数阶积分为

收稿日期: 2013-04-17　　**作者简介:** 杨慧(1976—)，女，讲师，研究方向为泛函分析与微分方程.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11361047); 山西省高校科技开发项目(20111021); 山西省回国留学人员科研资助项目(2013-102); 青海省自然科学基金资助项目(2012-Z-910)

$$I_a^\alpha h(t)=\int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)\mathrm{d}s,$$

其中 Γ 为 Gramma 函数. 当 $a=0$ 时,记 $I^\alpha h(t)=h(t)*\varphi_\alpha(t)$,对于 $t>0$, $\varphi_\alpha(t)=\dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$,对于 $t\leqslant 0$, $\varphi_\alpha(t)=0$,且当 $\alpha\to 0$ 时, $\varphi_\alpha(t)\to\delta(t)$, δ 为 Delta 函数.

定义 2[8] 对于定义在区间 $[a,b]$ 的函数 h,其 Caputo 型 α 次分数阶导数为

$${}^C D_{a^+}^\alpha h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$

这里 $n=[\alpha]+1$.

引理 1[8] 设 $\alpha>0$,则分数阶微分方程 ${}^C D_{0^+}^\alpha h(t)=0$ 的解为 $h(t)=C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_{n-1}t^{n-1}$,其中 $C_i\in\mathbf{R}$, $i=0,1,2,\cdots,n-1$,这里 n 是大于或等于 α 的最小整数.

定义 3[9] 设 $T:K\times K\to K$,如果 $T(u,v)$ 关于 u 不减,关于 v 不增,即如果 $u_1\leqslant u_2(u_1,u_2\in K)$,对于任意的 $v\in K$,有 $T(u_1,v)\leqslant T(u_2,v)$;如果 $v_1\geqslant v_2(v_1,v_2\in K)$,对于任意的 $u\in K$,有 $T(u,v_1)\leqslant T(u,v_2)$,则称算子 T 为混合单调算子. 若 $x^*\in K$,使得 $T(x^*,x^*)=x^*$,则称 x^* 为算子 T 的不动点.

定理 1 边值问题(1) 的解等价于积分方程 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s$ 的解,其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}, & s\leqslant t;\\[2mm] \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}, & t<s.\end{cases} \tag{2}$$

证明 设 $u\in C[0,1]$ 为边值问题(1) 的解,由引理 1 可知

$$u(t)=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-2}t^{n-2}+c_{n-1}t^{n-1}-\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

根据边界条件显然有 $c_0=c_1=c_2=\cdots=c_{n-3}=c_{n-1}=0$,再由条件 $u^{(n-2)}(1)=0$ 可求得

$$c_{n-2}=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!\ \Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-n+1}g(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

从而有

$$u(t)=c_{n-2}t^{n-2}+\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(s,u(s))\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_0^t\Big(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}\Big)g(s,u(s))\mathrm{d}s+$$

$$\int_t^1\Big(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}g(s,u(s))\mathrm{d}s\Big)=\int_0^1 G(t,s)g(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

定理得证.

定理 2 由公式(2) 给出的格林函数 $G(t,s)$ 具有如下性质:

1) $G(t,s)>0,\forall t,s\in[0,1]$;

2) $G(t,s)\leqslant H(s)\leqslant\dfrac{(1-s)^{\alpha-n+1}}{(n-2)!\ \Gamma(\alpha-n+2)}$,

$$H(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}(1-s)^{\alpha-n+1}-(1-s)^{\alpha-1}, & s\leqslant t,\\[2mm] \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}s^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}, & t<s;\end{cases} \tag{3}$$

3) $G(t,s)\geqslant t^{n-2}H(s),\forall t,s\in[0,1]$;

4) $G(t,s)\leqslant\dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!\ \Gamma(\alpha-n+2)},\forall t,s\in[0,1]$.

证明　1）当 $t<s$ 时，显然有 $G(t,s)>0$. 当 $t\geqslant s$ 时，由于 $\alpha\in(n-1,n]$ 且 $n\geqslant 2$，有

$$\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}>1,$$

而 $t,s\in[0,1]$，所以 $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}>t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}\geqslant(t-s)^{n-2}(t-s)^{\alpha-n+1}=(t-s)^{\alpha-1}$，于是 $G(t,s)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}>0$.

2）当 $t\in[0,s]$ 时，

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}\leqslant$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}s^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}=H(s).$$

当 $t\in(s,1]$ 时，有

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}.$$

对 t 求偏导数得

$$G_t(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-3)!}t^{n-3}(1-s)^{\alpha-n+1}-(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}=$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-3)!}t^{n-3}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-2}\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left((t-s)^{n-3}(t-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-2}\right)=0,$$

因而当 $t\in(s,1]$ 时，$G(t,s)$ 关于 t 是单调递增的，故有 $G(t,s)\leqslant G(1,s)=H(s)$.

另外，由方程(3)得

$$H(s)\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}(1-s)^{\alpha-n+1}=\frac{(1-s)^{\alpha-n+1}}{(n-2)!\ \Gamma(\alpha-n+2)}.$$

3）当 $t\in[0,s)$ 时，有：

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1},$$
$$H(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}s^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1},$$
$$\frac{G(t,s)}{H(s)}=\left(\frac{t}{s}\right)^{n-2}\geqslant t^{n-2}.$$

当 $t\in[s,1]$ 时，有：

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}\right),$$
$$H(s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}(1-s)^{\alpha-n+1}-(1-s)^{\alpha-1}\right),$$

$$\frac{G(t,s)}{H(s)}=\frac{1}{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}-(1-s)^{n-2}}\left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-2)!}t^{n-2}-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{(1-s)^{\alpha-n+1}}\right).$$

因为 $s\leqslant t\leqslant 1$，$s\geqslant ts$，$t-s\leqslant t-ts$，所以 $\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{(1-s)^{\alpha-n+1}}\leqslant\frac{(t-ts)^{n-2}(1-s)^{\alpha-n+1}}{(1-s)^{\alpha-n+1}}=t^{n-2}(1-s)^{n-2}$，进而 $\frac{G(t,s)}{H(s)}\geqslant t^{n-2}$，所以 $G(t,s)\geqslant t^{n-2}H(s)$.

4）利用 $G(t,s)$ 的定义很容易得证.

2 主要结果及其证明

设 $E=C[0,1]$，赋予最大值范数 $\|u\|=\max|u(t)|\ (\forall u\in E)$，则 $(E,\|\cdot\|)$ 为一 Banach 空间. 由此易知 $P=\{u\in C[0,1]\mid u(t)\geqslant 0\}$，$\forall t\in[0,1]$ 为 $C[0,1]$ 上的一个正规锥，其中 θ 表示 E 的零元素. $e\in P$，$\|e\|\leqslant 1$，$e\neq\theta$，定义 $Q_e=\{x\in P\mid \exists\lambda,\mu>0,\ \text{s.t.}\ \lambda e\leqslant x\leqslant \mu e\}$，其中 $e=t^{n-2}\ (n\geqslant 2)$.

引理 2[9] 设 P 是实 Banach 空间 E 中的正规锥，$e>\theta$，$A:Q_e\times Q_e\to Q_e$ 是混合单调算子，对任意的 $0<t<1$，存在 $0<\alpha=\alpha(t)<1$，使得 $A(tu,t^{-1}v)\geqslant t^{\alpha(t)}A(u,v)$，$u,v\in Q_e$，则 A 在 Q_e 中具有唯一的不动点 u^*，并且对任意的初始值 $x_0,y_0\in Q_e$，有 $\|x_n-u^*\|\to 0$，$\|y_n-u^*\|\to 0\ (n\to\infty)$，其中 $x_n=A(x_{n-1},y_{n-1})$，$y_n=A(y_{n-1},x_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots)$.

当方程(1)中的 $g(t,u)=f(t,u,u)$ 时，该边值问题转化为

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t),u(t))=0, \\ u(0)=u'(0)=\cdots=u^{(n-3)}(0)=u^{(n-2)}(1)=u^{(n-1)}(0)=0. \end{cases} \tag{4}$$

定理 3 假定 $f\in C[(0,1)\times[0,\infty)\times[0,\infty),\mathbf{R}^+]$，且满足：

i) $f(t,u,v)$ 关于 u 不减，关于 v 不增；

ii) 存在 $r\in(0,1)$ 使得 $f(t,\lambda u,\frac{1}{\lambda}v)\geqslant\lambda^r f(t,u,v)$，$u,v>0$，$0<\lambda<1$；

iii) 若 $0<\int_0^1 f(t,Qt^{n-2},Rt^{n-2})\mathrm{d}t<+\infty$，$\forall Q,R\in(0,\infty)$.

则边值问题(4)有唯一的正解.

证明 定义算子 $T:Q_e\times Q_e\to P$ 为 $T(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s$，$\forall u,v\in Q_e$. 根据格林函数性质及给定的条件 iii) 可知定义的算子 T 有意义.

首先证明 $T(u,v)\in Q_e$，即 $T:Q_e\times Q_e\to Q_e$. 由于 $u,v\in Q_e$，则存在 $\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2$ 使得 $\lambda_1 e\leqslant u(t)\leqslant\mu_1 e$，$\lambda_2 e\leqslant v(t)\leqslant\mu_2 e$，从而有：

$$T(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\geqslant t^{n-2}\int_0^1 H(s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$t^{n-2}\int_0^1 G(t,s)f(t,0,1)\mathrm{d}t=\lambda_3 e\geqslant 0,$$
$$T(u,v)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{t^{n-2}}{(n-2)!\ \Gamma(\alpha-n+2)}\int_0^1 f(s,\mu_1 s^{n-2},\lambda_2 s^{n-2})\mathrm{d}s=\mu_3 t^{n-2},$$

则算子 $T:Q_e\times Q_e\to Q_e$.

其次需证明 $T:Q_e\times Q_e\to Q_e$ 是混合单调算子. 事实上，如果 $u_1\leqslant u_2\ (u_1,u_2\in Q_e)$，可知

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,u_1(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(t,s)f(s,u_2(s),v(s))\mathrm{d}s,$$

式中隐含了 $T(u_1,v)(t)\leqslant T(u_2,v)(t)$，$\forall v\in Q_e$，即 $T(u,v)(t)$ 关于 u 是不减的. 类似地，如果 $v_1\geqslant v_2\ (v_1,v_2\in Q_e)$，可知

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v_1(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v_2(s))\mathrm{d}s,$$

式中隐含了 $T(u,v_1)(t)\leqslant T(u,v_2)(t)$，$\forall u\in Q_e$，即 $T(u,v)(t)$ 关于 v 是不增的. 所以算子 $T:Q_e\times Q_e\to Q_e$ 是混合单调算子.

最后，对于 $\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$T(\lambda u,\lambda^{-1}v)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,\lambda u(s),\lambda^{-1}v(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda^r\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s=\lambda^r T(u,v),$$

所以 $T(\lambda u,\lambda^{-1}v)(t)\geqslant\lambda^r T(u,v)$.

由引理 2 知一定存在唯一的 u^*,使得 $T(u^*,u^*)=u^*$,即边值问题(1)的正解存在且唯一.任意取定初值 $w_0\in Q_e$,令 $u_0=\lambda^{\frac{1}{2}}w_0$, $v_0=\lambda^{-\frac{1}{2}}w_0$,显然有 $u_0=\lambda v_0$, $u_0\leqslant v_0$.可设

$$u_n=T(u_{n-1},v_{n-1}),\quad v_n=T(v_{n-1},u_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots).$$

根据算子 T 的混合单调性,有:

$$u_1=T(u_0,v_0)\leqslant T(v_0,u_0)=v_1,\ u_1\geqslant u_0;$$

$$u_1=T(u_0,v_0)=T(\lambda^{\frac{1}{2}}w_0,\lambda^{-\frac{1}{2}}w_0)\geqslant\lambda^{\frac{r}{2}}T(v_0,u_0)\geqslant\lambda^{\frac{r}{2}}T(w_0,w_0)\geqslant\lambda^{\frac{1}{2}}w_0=u_0;$$

$$v_1=T(v_0,u_0)=T(\lambda^{-\frac{1}{2}}w_0,\lambda^{\frac{1}{2}}w_0)\leqslant\lambda^{-\frac{r}{2}}T(v_0,u_0)\geqslant\lambda^{-\frac{1}{2}}w_0=v_0.$$

由归纳法可以推出

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0,$$

其中 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是一个柯西列,并且 $\|u_n-u^*\|\to 0$, $\|v_n-u^*\|\to 0\ (n\to\infty)$.

注:定理 3 可用于解决更一般的高次分数阶微分方程边值问题.

例 1　考虑分数阶微分方程组

$$\begin{cases}{}^{C}D_{0^+}^{4.2}u(t)+\dfrac{\sqrt{u}}{t^2}+\dfrac{t}{\sqrt[3]{u}}=0,\ 0<t<1;\\ u(0)=u'(0)=u''(0)=u'''(1)=u^{(4)}(0)=0.\end{cases}\tag{5}$$

由方程(5)可知函数 $f(t,u,v)=\dfrac{\sqrt{u}}{t^2}+\dfrac{t}{\sqrt[3]{v}}$ 虽然不是单调函数,但具有混合单调性,并且有:

$$f(t,\lambda u,\frac{v}{\lambda})=\frac{\sqrt{\lambda u}}{t^2}+\frac{\sqrt[3]{\lambda}t}{\sqrt[3]{v}}\geqslant\sqrt{\lambda}f(t,u,v),\ \forall u,v>0,\ \lambda\in(0,1);$$

$$0<\int_0^1 f(t,Mt^3,Nt^3)\mathrm{d}t=\int_0^1(\frac{\sqrt{Mt^3}}{t^2}+\frac{t}{\sqrt[3]{Nt^3}})\mathrm{d}t=\int_0^1(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt[3]{N}})\mathrm{d}t<+\infty.$$

于是满足条件 i)—iii),再由定理 3 得到此边值问题的解存在且唯一.

参考文献:

[1] Zhang S. Existences of solutions for a boudary value problem of frational order[J]. Acta Math Sci, 2006,26B:220-228.

[2] Mouffak Benchohra, Samira Hamani, Sotiris K Ntouyas. Boundary value problems for differential equations with fractional order[J]. Mathematics and its Applications, 2008,3:1-12.

[3] Zhang Shuqin. Monotone iterative method for initial value problem involving Riemann-Liouville fractional derivatives[J]. Nonlinear Analysis, 2009,71:2087-2093.

[4] Chang Yong-kui, Juan J Nieto. Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009,49:605-609.

[5] 王永庆,刘立山. Banach 空间中分数阶微分方程 m 点边值问题的正解[J].数学物理学报,2012,32A(1):246-256.

[6] 原韶艳,刘衍胜.一类奇异分数阶微分方程边值问题解的存在唯一性[J].山东科学,2012,25(3):34-38.

[7] Zhang Shuqin. Positive solutions to singular boundary value problem for nonlinear fractional differential equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010,59:1300-1309.

[8] Podlubny I. Fractional Differential Equations, Mathematics in Sciences and Engineering, 198[M]. San Diego: Academic Press, 1999.

[9] Guo D J. Fixed point of mixed monotone operators and applications[J]. Appl Anal, 1988,31(3):215-224.