文章编号：1004-4353(2013)03-0161-06

随机 2-维纳维-斯托克斯-伯格斯方程的不变测度的存在性

韩英豪， 苏红， 于吉霞
（辽宁师范大学 数学学院，辽宁 大连 116029）

摘要：在具有光滑边界的有界区域 $D \subseteq \mathbf{R}^2$ 上，讨论了不可压缩流体的随机 2-维纳维-斯托克斯-伯格斯方程 $\mathrm{d}u = (\Delta u + \frac{1}{2}\nabla u^2 + (u \cdot \nabla)u)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)$，其中 W 关于时间是白噪声的，关于空间变量是尽可能一般的高斯型时-空随机向量场；利用 Krylov-Bogoliubov 判别定理证明了上述方程的不变测度的存在性.

关键词：随机纳维-斯托克斯-伯格斯方程；不变测度；胎紧性
中图分类号：O211.63；O175.29　　**文献标识码**：A

The existence of the invariant measures for 2D stochastic Navier-Stokes-Burgers equation

HAN Yinghao， SU Hong， YU Jixia
（*School of Mathematics*，*Liaoning Normal University*，*Dalian* 116029，*China*）

Abstract：We consider the following 2-dimensional Navier-Stokes-Burgers equation for an incompressible fluid in a bounded domain D with smooth boundary $\mathrm{d}u = (\Delta u + \frac{1}{2}\nabla u^2 + (u \cdot \nabla)u)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)$，where W is a Gaussian form space-time random field，which is white noise in time，and as general as possible in the space variable. The existence of invariant measure for the equation is proved using the Krylov-Bogoliubov theorem.

Key words：stochastic Navier-Stokes-Burgers equation；invariant measure；tightness

0 引言

随机偏微分方程的遍历性从上世纪末开始得到了深入的研究[1-4]. 1992 年 G. Da Prato[1] 研究了 1-维随机伯格斯方程的不变测度的存在性，1994 年 F. Flandoli[4] 研究了随机纳维-斯托克斯方程的耗散性和不变测度的存在性，其中纳维-斯托克斯方程虽然是研究湍流现象的一个理想的模型，但由于其解的复杂性(其解往往呈现出混沌现象)，所以很难用初等函数把它表示出来，而被随机外力扰动的纳维-斯托克斯方程的解更为复杂. 相反，确定性伯格斯方程的解总是呈现出一种稳定性，当施加一个确定性强迫力时，随着时间趋于无穷大，所有的解都趋近于一个稳定的解，因此此方程并不是一个用来研究湍流现象的理想模型；但该方程在施加随机强迫力之后，其解也呈现出混沌现象，所以一些学者把随机伯格斯方程也做为研究湍流现象的一个模型[4-6].

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上具有光滑边界的有界区域，本文将在该区域上研究如下具有不可压缩性和边界条件的随机 2-维纳维-斯托克斯-伯格斯方程：

收稿日期：2013－07－13
作者简介：韩英豪(1963—)，男，理学博士，副教授，研究方向为无穷维动力系统.

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u(t,x)=(\Delta u(t,x)+\frac{1}{2}\nabla u(t,x)^2+(u(t,x)\cdot\nabla)u(t,x))\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),\\&\operatorname{div}u(t,x)=0,\ x\in D;\ u(t,x)=0,\ x\in\partial D.\end{aligned}\tag{1}$$

其中 W 为下面式(3) 的无穷维布朗运动.

用 $\mathscr{V}$ 表示在 D 上无穷可微的支集严格包含在 D 内的散度为零的向量场构成的空间. 对任意 $\alpha\in\mathbf{R}$, 用 V_α 表示 $\mathscr{V}$ 在 2 维 Sobolev 空间 $\mathbf{H}^\alpha\times\mathbf{H}^\alpha$ 上的闭包. 特别地用 H 来记 V_0, 用 V 来记 V_1, 则 H 在如下内积和范数意义下变成 Hilbert 空间: $\langle f,g\rangle=\int_D f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$, $|f|=\left(\int_D|f|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, $f,g\in H$. 为了讨论方便, 我们引进线性算子 $A:D(A)\to H$, $Au=P\Delta u$(这里 P 为 $(L^2(D))^2$ 到 H 的正交投影). 于是有 $D(A)=(\mathbf{H}^2\times\mathbf{H}^2)\cap V$, 并且 V 与 $D((-A)^{1/2})$ 一致. 假设 A 是负定、自伴、其逆为紧的线性算子, 用 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 来记 $-A$ 的特征值, 用 $0<e_1\leqslant e_2\leqslant\cdots$ 来记其对应的特征函数构成的 H 的完备规范正交系统. 由以上条件和假设可得到 Poincaré 不等式 $|(-A)^{1/2}(\cdot)|\geqslant\lambda_1|\cdot|$.

再引进双线性算子 $B(\cdot,\cdot):V\times V\to V_{-1}$, $B(u,v)=(u\cdot\nabla)v$. 由不可压缩性, 得到 $\langle B(u,v),v\rangle=0$, $\langle B(u,v),w\rangle=-\langle B(u,w),v\rangle$, 并且方程(1) 变成如下 H 上的抽象形式的方程:

$$\mathrm{d}u=(Au+\frac{1}{2}\nabla u^2+B(u,u))\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t).\tag{2}$$

假设方程中的随机项 $W(t)$ 具有如下形式:

$$W(t)=\sum_{j=1}^{\infty}m_j\beta_j e_j,\tag{3}$$

其中 $\{\beta_j\}_{j\in\mathbf{N}^+}$ 是一组相互独立的, 并且是关于概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的滤 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant0}$ 相适应的标准实值布朗运动. 我们假设常数项 $\{m_j\}_{j\in\mathbf{N}^+}$ 对某一个 $\beta_0>0$ 满足条件

$$\sum_{j=1}^{\infty}m_j^2\lambda_j^{2\beta_0-1/2}<\infty.\tag{4}$$

这个条件表明 $W(t)$ 是 $D(A^{-1/4+\beta_0})$- 值布朗运动. 当常数项 $m_j=\lambda_i^{-1/4-\beta_0}$ 时, $W(t)$ 为 $D(A^{1/4+\beta_0})$- 值柱状布朗运动, 这说明上述条件囊括了绝大多数的无穷维布朗运动.

1 预备知识

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个概率空间, $\{\theta_t:\Omega\to\Omega\}_{t\in\mathbf{R}}$ 为 Ω 的保测变换族, 并满足 $\theta_0=Id_\Omega$, 对任意 $t,s\in\mathbf{R}$, 若有 $\theta_{t+s}=\theta_t\circ\theta_s$, 则称 $((\Omega,\mathscr{F},P),(\theta_t))_{t\in\mathbf{R}}$ 为概率空间 Ω 上的可测动力系统.

定义 1 设 H 为一个完备可分度量空间, 并具有 Borel σ- 代数 $\mathscr{B}(H)$. 如果一个可测映射 $\Phi:R^+\times H\times\Omega\to H$; $(t,u,\omega)\mapsto\Phi(t,\omega)u$ 满足 $\Phi(0,\omega)=Id_H$, 并且对任意 $t,s\in\mathbf{R}$ 有

$$\Phi((t+s),\omega)=\Phi(t,\theta_s\omega)\circ\Phi(s,\omega),\tag{5}$$

则称 Φ 是 H 上关于 θ_t 的随机动力系统.

用 $C_b(H)$ 表示由 H 上的所有有界连续函数所构成的空间, 其范数是上确界范数. 用 $Pr(H)$ 表示在 $(H,\mathscr{B}(H))$ 上可测的概率测度构成的空间, 并引进符号 $\langle f,\mu\rangle:=\int_H f(x)\mu(\mathrm{d}x)$, $f\in C_b(H)$, $\mu\in Pr(H)$. 在 $C_b(H)$ 上定义 Markov 半群 P_t, 使得 $(P_tf)(x):=Ef(\Phi(t,x,\cdot))$, $f\in C_b(H)$, $x\in H$. 并且, 在 $Pr(H)$ 上定义其对偶半群 P_t^* 为 $\langle f,P_t^*\mu\rangle:=\langle P_tf,\mu\rangle$, $f\in C_b(H)$, $\mu\in Pr(H)$.

定义 2 设 P_t 为 $C_b(H)$ 上的一个 Markov 半群, 如果存在 $\mu\in Pr(H)$, 使得对所有 $t>0$, 有 $P_t^*\mu=\mu$, 则称 μ 为 P_t 的一个不变测度.

定义 3 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在紧集 $K\subseteq H$, 使得 $\{\mathscr{L}(u_\lambda(0))\}_{K^c}\leqslant\varepsilon$, $\forall\lambda\geqslant0$ 成立, 则称分布列 $\{\mathscr{L}(u_\lambda(0))\}_{\lambda\geqslant0}$ 为胎紧的.

如果对所有 $t\geqslant0$, 半群 P_t 为 $C_b(H)$ 上的变换, 则称 Markov 半群 P_t 具有 Feller 性.

定理 1(Krylov-Bogoliubov)　设随机动力系统 Φ 决定的 Markov 半群 P_t 具有 Feller 性，并且对某一 $x \in H$ 存在序列 $t_n \to +\infty$，使得 $\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \mathscr{L}(\Phi(s,x,\cdot))\mathrm{d}s \to \tilde{\mu}$ weakly as $n \to +\infty$，那么 $\tilde{\mu}$ 为 P_t 的一个不变测度.

定理 2(Prokhorov)　$Pr(H)$ 的子集 Γ 相对紧当且仅当 Γ 是肽紧的.

以下给出方程(2) 所决定的随机动力系统. 令 H 为以上所定义的 Hilbert 空间，设 $u_0 \in H$. 如果存在循序可测的映射 $u:[t_0,T]\times D\times\Omega \to R^2$，$P$-几乎确定 $u(\cdot,\cdot,\omega) \in L^2(t_0,T;V) \cap C(t_0,T;H)$，并对任意 $\upsilon \in D(A)$，$t \in [t_0,T]$ 有 $\langle u(t),\upsilon\rangle = \langle u_0,\upsilon\rangle + \int_0^t (\langle u(s),A^*\upsilon\rangle + \langle \frac{1}{2}\nabla u(s)^2 + B(u(s),u(s)),\upsilon\rangle)\mathrm{d}s + \langle W(t-t_0),\upsilon\rangle$，则称 $u(t)$ 为方程(2) 的以 u_0 为初始条件的弱解.

如果定义 $\theta_t(\cdot)=\theta(t+\cdot)-\theta(t)$，那么由后面定理 3 的结果，可以定义 H 上关于 θ_t 的随机动力系统 $\Phi(t,u_0,\cdot)=u(t)$，其中 $u(t)$ 为以 u_0 为初始条件的方程(2) 的弱解. 由解的唯一性可知，Φ 满足(5) 式.

2　弱解的存在和唯一性

本文中 C 表示正常数，$C(\varepsilon)$，$c_i(\varepsilon)$ $(i=1,2,\cdots)$ 表示依赖于 ε 的正常数. 为了便于处理方程，对于 $\forall\alpha>0$，引进改进的随机卷积 $W_A^\alpha(t)=\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{(t-s)(A-\alpha)}\mathrm{d}W(s)$，则 $W_A^\alpha(0)$ 是改进的 Ornstein-Uhlenbeck 方程 $\begin{cases}\mathrm{d}z=(Az-\alpha z)\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),\\ z(0)=z_0\end{cases}$ 的遍历不变解，其中 $z_0=\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-s(A-\alpha)}\mathrm{d}W(s)$. 对于 $t \geqslant t_0$，通过变量替换 $\upsilon^\alpha(t)=u(t)-W_A^\alpha(t)$，方程(2) 变为如下半线性随机微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=A\upsilon^\alpha(t)+\dfrac{1}{2}\nabla(\upsilon^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2+B(\upsilon^\alpha(t)+W_A^\alpha(t),\upsilon^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))+\alpha W_A^\alpha(t),\\ \upsilon^\alpha(t_0)=u(t_0)-W_A^\alpha(t_0).\end{cases} \tag{6}$$

定理 3　对任意 $u_0 \in H$，方程(2) 在任意区间$[t_0,T]$上存在唯一的 Markov 弱解 u，对 $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$，满足

$$u(\cdot,\cdot,\omega) \in C(t_0,T;H) \cap L^2(t_0,T;D(A^{\min\{1/4+\beta,1/2\}}))\ \text{e. s.}, \tag{7}$$

并具有正则性

$$\upsilon^\alpha(\cdot,\cdot,\omega)=u(\cdot,\cdot,\omega)-W_A^\alpha(\cdot,\cdot,\omega) \in L^2(t_0,T;V). \tag{8}$$

证明　用 H_n 来表示由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 张成的 H 的子空间，用 P_n 来表示从空间 H 到 H_n 的正交投影，并令 $W_{A,n}^\alpha(t)=\sum_{j=1}^n(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{(t-s)(A-\alpha)}m_je_j\mathrm{d}\beta_j(s))$，$\upsilon_n^\alpha \in H_n$. 考虑如下 n 元常微分方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon_n^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=A\upsilon_n^\alpha(t)+\dfrac{1}{2}P_n\nabla(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2+\\ \qquad P_nB(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t),\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))+\alpha P_nW_{A,n}^\alpha(t),\\ \upsilon_n^\alpha(t_0)=P_n(u_0-W_{A,n}^\alpha(t_0)).\end{cases} \tag{9}$$

显然，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\upsilon_n^\alpha(t_0)=\upsilon^\alpha(t_0)$. 在 H 上对方程(9) 的两端用 $\upsilon_n^\alpha(t)$ 做内积，整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\upsilon_n^\alpha(t)|^2+|(-A)^{\frac{1}{2}}\upsilon_n^\alpha(t)|^2-\frac{1}{2}\langle\nabla(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2,\upsilon_n^\alpha(t)\rangle=$$
$$\langle B(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t),\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t)),\upsilon_n^\alpha(t)\rangle+\alpha\int_D W_{A,n}^\alpha(t)\upsilon_n^\alpha(t)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

由 $\mathrm{div}\,u_n^\alpha(t)=\mathrm{div}(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))=0$ 和边界条件可推出

$$\langle\nabla(\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2,\upsilon_n^\alpha(t)\rangle=\int_D \mathrm{div}((\upsilon_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2\upsilon_n^\alpha(t))\mathrm{d}x-$$

$$\int_D (v_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2 \operatorname{div} v_n^\alpha(t)\mathrm{d}x=\int_{\partial D}(v_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t))^2 v_n^\alpha(t)\upsilon \mathrm{d}x=0. \tag{11}$$

其中 υ 表示 D 边界 ∂D 的向外单位法向量. 利用插值不等式、Hölder 不等式和 Young 不等式,由(10)式得

$$\begin{aligned}&|\langle B(v_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t),v_n^\alpha(t)+W_{A,n}^\alpha(t)),v_n^\alpha(t)\rangle|\leqslant\\ &\varepsilon|(-A)^{\frac12}v_n^\alpha(t)|^2+c_1(\varepsilon)|W_{A,n}^\alpha(t)|_{L^4(D)}^4|v_n^\alpha(t)|^2+C(\varepsilon)|W_{A,n}^\alpha(t)|_{L^4(D)}^4.\end{aligned} \tag{12}$$

利用(11)、(12)式和 Sobolev 嵌入公式,并选取适当的常数 ε,可得到

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v_n^\alpha(t)|^2+\frac12|(-A)^{\frac12}v_n^\alpha(t)|^2\leqslant\\ &c_1(\varepsilon)|W_{A,n}^\alpha(t)|_{L^4(D)}^4|v_n^\alpha(t)|^2+C|W_{A,n}^\alpha(t)|_{L^4(D)}^4+C\alpha^2|W_{A,n}^\alpha(t)|^2.\end{aligned} \tag{13}$$

由(13)式和 Gronwall 不等式,可得到:

$$\begin{aligned}&|v_n^\alpha(t)|^2\leqslant|v_n^\alpha(t_0)|^2(\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t(-\lambda_1+c_1(\varepsilon)|W_{A,n}^\alpha(s)|_{L^4(D)}^4)\mathrm{d}s})+\\ &C\int_{t_0}^t(|W_{A,n}^\alpha(s)|_{L^4(D)}^4+\alpha^2|W_{A,n}^\alpha(s)|^2)(\mathrm{e}^{\int_s^t(-\lambda_1+c_1(\varepsilon)|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|_{L^4(D)}^4)\mathrm{d}\sigma})\mathrm{d}s;\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^t|(-A)^{\frac12}v_n^\alpha(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\leqslant|v_n^\alpha(t_0)|^2+C\int_{t_0}^t(|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|_{L^4(D)}^4|v_n^\alpha(\sigma)|^2+\\ &|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|_{L^4(D)}^4+\alpha^2|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|^2)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{15}$$

另外,由定义 $W_{A,n}^\alpha(t)$ 为 H 上的对称的高斯过程,可知其协方差算子为 $EW_{A,n}^\alpha(t)\otimes W_{A,n}^\alpha(t)=\operatorname{diag}\left(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-2(t-s)(\lambda_j+\alpha)}m_j^2\mathrm{d}s: j=1,\cdots,n\right)=\operatorname{diag}(m_j^2/2(\lambda_j+\alpha): j=1,\cdots,n)$. 因此,由 Sobolev 嵌入定理和布朗运动 $\{\beta_j: j=1,2,\cdots\}$ 的独立性,得

$$\begin{aligned}&E|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|_{L^4(D)}^4\leqslant CE|W_{A,n}^\alpha(\sigma)|_{D(A^{1/4+\beta})}^4=C\Big(\sum_{i,j=1,i\neq j}^n\frac{\lambda_i^{1/2+2\beta}m_i^2}{2(\lambda_i+\alpha)}\frac{\lambda_j^{1/2+2\beta}m_j^2}{2(\lambda_j+\alpha)}+\\ &\sum_{j=1}^n E\Big(\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-2(t-s)(\lambda_j+\alpha)}\lambda_j^{1/4+\beta}m_j\mathrm{d}\beta_j(s)\Big)^4\Big)<C\Big(\sum_{i,j=1,i\neq j}^\infty\frac{\lambda_i^{1/2+2\beta}m_i^2}{2(\lambda_i+\alpha)}\frac{\lambda_j^{1/2+2\beta}m_j^2}{2(\lambda_j+\alpha)}+\\ &\sum_{j=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{s^4}{m_j}\sqrt{\frac{\lambda_j+\alpha}{\pi}}\mathrm{e}^{-s^2(\lambda_j+\alpha)/m_j^2}\mathrm{d}s\Big)=C\Big(\sum_{i=1}^\infty\frac{\lambda_i^{1/2+2\beta}m_i^2}{2(\lambda_i+\alpha)}\Big)^2+2\sum_{i=1}^\infty C\Big(\frac{\lambda_i^{1/2+2\beta}m_i^2}{2(\lambda_i+\alpha)}\Big)^2<\infty.\end{aligned} \tag{16}$$

所以由(13)和(15)式可知,$|v_n^\alpha(t)|^2<r_1(\omega)<\infty$,$\int_{t_0}^T|(-A)^{1/2}v_n^\alpha(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma<r_2(\omega)<\infty$ a.s.. 由这些不等式,再利用 Galerkin 方法,可以得到满足条件(8)的方程(6)的弱解 $v^\alpha(t)$,再由 $W_A^\alpha(t,\cdot,\omega)\in D(A^{\min\{1/4+\beta,1/2\}})$ 可得到解的性质(7).

下面证明解的唯一性. 假设 $v_1^\alpha(t)$,$v_2^\alpha(t)$ 是方程(6)的两个解,则有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))}{\mathrm{d}t}=A(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))+\frac12\nabla((v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2-(v_2^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2)+\\ &B(v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t),v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))-B(v_2^\alpha(t)+W_A^\alpha(t),v_2^\alpha(t)+W_A^\alpha(t)).\end{aligned}$$

对上式两端在 H 上与 $(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))$ 做内积,再利用插值不等式、Hölder 不等式和 Young 不等式,可得

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)|^2+|(-A)^{\frac12}(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))|^2=\\ &|\langle B(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t),v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t)),v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\rangle|+\\ &\left|\langle\frac12\nabla((v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2-(v_2^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2),v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\rangle\right|\leqslant\\ &|(-A)^{\frac12}(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))|^2+C|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)|_{L^4(D)}^2|v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t)|_{L^4(D)}^2+\\ &\frac12\int_{\partial D}((v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2-(v_2^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2)(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))\upsilon\mathrm{d}s\leqslant\\ &|(-A)^{\frac12}(v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t))|^2+C|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)|_{L^4(D)}^2|v_1^\alpha(t)+W_A^\alpha(t)|_{L^4(D)}^2.\end{aligned}$$

再利用 Gronwall 不等式，由上式可得

$$|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)|^2\leqslant|v_1^\alpha(t_0)-v_2^\alpha(t_0)|^2\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t(C|v_1^\alpha(\sigma)+W_A^\alpha(\sigma)|_{L^4(D)}^4)\mathrm{d}\sigma}.\tag{17}$$

结合(16)式，即可得出解的唯一性.

3　Feller 性及其不变测度的存在性

引理 1　转移半群 P_t 满足性质 $P_t(C_b(H))\subset C_b(H)$.

证明　假设序列 $x_n\in H$ 满足 $x_n\to x$, a.s. in H. 由(17)式可知 $v_n^\alpha(t)\to v^\alpha(t)$, a.s. in H，这就意味着对任意 $\phi\in C_b(H)$，有 $\phi(v_n^\alpha(t))\to\phi(v^\alpha(t))$, in H a.s.. 由控制收敛定理可得 $P_t\phi(x_n)\to P_t\phi(x)$.

下证当 α 足够大时，均方意义下 $|W_A^\alpha(t)|$ 在 $D(A^{1/2+2\beta})$ 上任意小.

引理 2　对任意 $\varepsilon>0$, $0\leqslant\beta<\beta_0$，存在 $\alpha>0$，使得对所有 $t\in\mathbf{R}$，有 $E(|(-A)^{\frac14+\beta}W_A^\alpha(t)|^2)<\varepsilon$.

证明　由假设(3)，把 $W_A^\alpha(t)$ 表示成无穷级数 $W_A^\alpha(t)=\sum_{j=1}^\infty(\int_{-\infty}^t\mathrm{e}^{(t-s)(A-\alpha)}m_je_j\mathrm{d}\beta_j(s))$. 由 Itô 等距公式和算子 A 的性质，得到 $E(|(-A)^{\frac14+\beta}W_A^\alpha(t)|^2)=\sum_{j=1}^\infty\int_{-\infty}^t m_j^2\lambda_j^{\frac12+2\beta}\mathrm{e}^{-2(\lambda_j+\alpha)(t-s)}\mathrm{d}s=\sum_{j=1}^\infty\frac{(\lambda_j)^{\frac12+2\beta}m_j^2}{2(\lambda_j+\alpha)}\leqslant\sum_{j=1}^{N_0}\frac{(\lambda_j)^{\frac12+2\beta}m_j^2}{2(\lambda_j+\alpha)}+\sum_{j=N_0+1}^\infty\frac12(\lambda_j)^{2\beta-\frac12}m_j^2$. 由假设(4)知：当 N_0 取值足够大时，上面不等式右侧第 2 项趋近于无穷小；当 α 的值足够大时，不等式右侧的第 1 项趋近于无穷小. 因而，引理 2 得证.

下面把 Wiener 过程 $W(t)$ 扩充到整个实数域 $\mathbf{R}$ 上，即(3)式中的 β_j 为双边实值标准布朗运动. 对于 $\forall\lambda\geqslant0$，我们把方程(2)的解记为 $u_\lambda(t)=\Phi(t,0,\theta_{-\lambda}(\cdot))$，即 $u_\lambda(t)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_\lambda=(Au_\lambda+\dfrac12\nabla u_\lambda^2+B(u_\lambda,u_\lambda))\mathrm{d}t+\mathrm{d}W(t),\\ u_\lambda(-\lambda)=0.\end{cases}\tag{18}$$

根据定理 3，方程(18)存在解. 借助对 $\forall\sigma>0$，嵌入 $H^\sigma(D)\to L^2(D)$ 的紧性来证明 $\{u_\lambda(0)\}_{\lambda\geqslant0}$ 的紧性. 从而，证明分布列 $\{\mathscr{L}(u_\lambda(0))\}_{\lambda\geqslant0}$ 的胎紧性.

对 $t\geqslant-\lambda$，通过变量替换 $v_\lambda^\alpha(t)=u_\lambda(t)-W_A^\alpha(t)$，方程(18)变为如下半线性随机微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_\lambda^\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=Av_\lambda^\alpha(t)+\dfrac12\nabla(v_\lambda^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))^2+B(v_\lambda^\alpha(t)+W_A^\alpha(t),v_\lambda^\alpha(t)+W_A^\alpha(t))+\alpha W_A^\alpha(t),\\ v_\lambda^\alpha(-\lambda)=-W_A^\alpha(-\lambda).\end{cases}\tag{19}$$

4　主要结果及其证明

定理 4　方程(2)所决定的转移半群 P_t 存在不变测度.

证明　首先估计(14)式右端. 由文献[2-3]可知，随机过程 W_A^α 是遍历的，即

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac1\lambda\int_{-\lambda}^0|W_A^\alpha(s)|_{L^4(D)}^4\mathrm{d}s=E(|W_A^\alpha(t)|_{L^4(D)}^4),\ \text{a.s. in } P.$$

从而，由引理 2 可知，存在随机常数 $\alpha_0(w)>0$, $\lambda_0>0$，当 $\alpha>\alpha_0(w)$, $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，

$$c_1(\varepsilon)\int_{-\lambda}^0|W_A^\alpha(s)|_{L^4(D)}^4\mathrm{d}s\leqslant\frac12\lambda$$

几乎必然成立. 并且，由于 $|W_{A,n}^\alpha(s)|$ 和 $|W_{A,n}^\alpha(s)|_{L^4(D)}$ 有至多多项式增长，从而当 $\alpha>\alpha_0$ 时，(14)式右端是几乎必然有界的，即存在一个随机变量 $r_3(\omega)$，使得对任意 $\lambda>s$，

$$|v_\lambda^\alpha(s)|\leqslant r_3(\omega)\tag{20}$$

对 $s\in[-1,0]$ 几乎必然成立. 同理，由(16)式可知存在随机变量 $r_4(\omega)$，使得

$$\int_{-1}^{0}|(-A)^{\frac{1}{2}}v_n^\alpha(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\leqslant r_4(\omega).\tag{21}$$

用$(-A)^{2\theta}v_\lambda^\alpha(t)$ $(0<\theta\leqslant\frac{1}{2})$ 与方程(19)的第 1 式两端在空间 H 上做内积,整理得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)|^2+|(-A)^{\frac{1}{2}+\theta}v_\lambda^\alpha(t)|^2=\\&\langle(-A)^\theta B(v_\lambda^\alpha(t)+W_A^\alpha(t),v_\lambda^\alpha(t)+W_A^\alpha(t)),(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)\rangle+\alpha\langle(-A)^\theta W_A^\alpha(t),(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)\rangle\leqslant\\&\varepsilon|(-A)^{\theta+\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(t)|^2+C(\varepsilon)(|v_\lambda^\alpha(t)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(t)|^2|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)|^2+\\&|(-A)^{\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}W_A^\alpha(t)|^4)+\varepsilon|(-A)^{2\theta}v_\lambda^\alpha(t)|^2+C(\varepsilon)|W_A^\alpha(t)|^2.\end{aligned}$$

取 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{4}$,并利用 Poincaré 不等式,得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)|^2+|(-A)^{\frac{1}{2}+\theta}v_\lambda^\alpha(t)|^2\leqslant\\&C(|v_\lambda^\alpha(t)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(t)|^2|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(t)|^2+|W_A^\alpha(t)|^2+|(-A)^{\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}W_A^\alpha(t)|^4).\end{aligned}$$

再利用 Gronwall 不等式,得

$$\begin{aligned}&|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(0)|^2\leqslant\mathrm{e}^{(\int_r^0C|v_\lambda^\alpha(s)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(s)|^2\mathrm{d}s)}|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(r)|^2+\\&C\int_r^0\mathrm{e}^{(\int_\sigma^0C|v_\lambda^\alpha(s)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(s)|^2\mathrm{d}s)}(|W_A^\alpha(\sigma)|^2+|(-A)^{\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}W_A^\alpha(\sigma)|^4)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

对上式两端关于 r 在$[-1,0]$上做积分,整理得

$$\begin{aligned}&|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(0)|^2\leqslant\mathrm{e}^{(\int_{-1}^0C|v_\lambda^\alpha(s)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(s)|^2\mathrm{d}s)}\int_{-1}^0|(-A)^\theta v_\lambda^\alpha(r)|^2\mathrm{d}r+\\&C\int_{-1}^0\mathrm{e}^{(\int_\sigma^0C|v_\lambda^\alpha(s)|^2|(-A)^{\frac{1}{2}}v_\lambda^\alpha(s)|^2\mathrm{d}s)}(|W_A^\alpha(\sigma)|^2+|(-A)^{\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}W_A^\alpha(\sigma)|^4)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

结合(20)和(21)式,从上式可推得$\{v_\lambda^\alpha(0)\}_{\lambda\geqslant0}$和$\{u_\lambda(0)\}_{\lambda\geqslant0}$在 $H^{2\theta}(D)$上几乎必然有界. 从而,依概率有界. 由嵌入 $H^{2\theta}\to L^2(D)$ 的紧性可得分布列$\{\mathscr{L}(u_\lambda(0))\}_{\lambda\geqslant0}$的胎紧性. 再结合引理 1 和 Krylov-Bogoliubov 定理,定理 4 得证.

注 1 如果 $u_0\in C^\infty(D)$,则从定理 4 的证明可知,对 $\theta\in(0,2\beta_0)\cap(0,1/2]$,可得 $u(\cdot,\cdot,\omega)\in C(t_0,T;D(A^{\min\{1/4+\beta,\theta\}}))\cap L^2(t_0,T;D(A^{\min\{1/4+\beta,1/2+\theta\}}))$.

参考文献:

[1] Prato G Da, Gatarek D. Stochastic Burgers equation with correlated noise[J]. Stochastics Stoch Rep, 1995,52:29-41.

[2] Flandoli F, Gatarek D. Dissipativity and invariant measures for stochastic Navier-Stokes equations[J]. Probability Theory and Related Fields, 1995,102(3):367-391.

[3] Crauel H, Flandol F. Attractors for random dynamical systems[J]. Probab Theory Relat Fields, 1994,100(3):365-393.

[4] Choi H, Temam R, Moin P, et al. Feedback control for unsteady flow and its application to Burgers equation[J]. J Fluid Mechanics, 1993,253:509-543.

[5] Hosokawa I, Yamamoto K. Turbolence in the randomly forced one dimensional Burgers flow[J]. J Stat Phys, 1975,13(3):245-272.

[6] Chambers D H, Adrian R J, Moin P, et al. Karhunen-Loéve expansion of Burgers' model of turbulence[J]. Phys Fluids, 1988,31(9):2573-2582.

[7] Jeng Dah Teng. Forced model equation for turbulence[J]. The Physics of Fluids, 1969,12(10):2006-2010.

[8] Kardar M, Parisi M, Zhang J C. Dynamical scaling of growing interfaces[J]. Phys Rev Lett, 1986,56(9):889-892.

[9] Prato Da G, Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications[M]. New York: Cambridge University Press, 1992.