文章编号： 1004-4353(2013)03-0157-04

一类泛函差分方程的频率收敛解

李慧， 祝相宇， 陶元红*
(延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002)

摘要： 利用数列的频率测度的定义及其性质研究了一类差分方程解的频率收敛性. 首先定义与所讨论差分方程密切相关的多项式函数，并求出此函数的不动点；然后利用此函数在不同区间上的单调性，证明了初始值取在 [0,1] 区间时，差分方程的解存在两个 0.5 度频率极限 0 和 1.

关键词： 频率测度；差分方程；频率收敛
中图分类号： O177.3　　　**文献标识码：** A

Frequently convergent solutions of a class of functional difference equation

LI Hui, ZHU Xiangyu, TAO Yuanhong*
(*Department of Mathematics*, *College of Science*, *Yanbian University*, *Yanji* 133002, *China*)

Abstract: Frequently convergent solutions of a class of functional difference equation are discussed by using definitions and properties of frequency measure of real valued sequences. First of all, a polynomial function closely related to the difference equation is defined, and then its fixed points are presented. Finally, using monotone properties of this function in different interval, it is proved that if the initial values are in the interval [0,1], then the solutions of the difference equation have two frequent limits 0 and 1 of degree 0.5.

Key words: frequency measure; difference equation; frequent convergence

经典的收敛概念已经不能准确描述数列的收敛性，为了更细致地刻画数列的收敛性，2009 年田传俊[1-2]首次引进了数列的频率测度的概念，并由此定义了数列的频率收敛性和频率振动性的概念. 近几年来，差分方程解的频率收敛性和频率振动性问题得到了人们的关注，目前为止，人们得到的成果多集中在差分方程解的频率振动性方面[1-11]，而关于解的频率收敛性讨论得很少. 频率收敛的概念与经典的收敛概念相比更为一般化，并且这些新的概念及其性质能够在复杂的动力系统上得到更好地运用[12]. 本文探讨如下一类差分方程的频率收敛性，得出这类方程的解的频率收敛性定理：

$$x_{n+2}=1-x_n^2. \tag{1}$$

1　预备知识

对任意两个集合 A 和 B，将 A 与 B 的并、交、差集分别记为 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$. 此外，用 $\varnothing$ 表示空集合. 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集，对 $k,l\in\mathbf{Z}$，记 $\mathbf{Z}[k,\infty)=\{i\in\mathbf{Z}\mid i\geqslant k\}$，$\mathbf{Z}[k,l]=\{i\in\mathbf{Z}\mid k\leqslant i\leqslant l\}$，$\mathbf{Z}(-\infty,l]=\{i\in\mathbf{Z}\mid i\leqslant l\}$. 设 $\Omega\subseteq\mathbf{Z}$，$|\Omega|$ 表示集合 Ω 中元素的个数，记 $\Omega^{(n)}=\Omega\cap\mathbf{Z}(-\infty,n]$.

设 $X=\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ 是实数列，c 为任意常数，记 $(x\leqslant c)=\{n\in\mathbf{Z}\mid x_n\leqslant c\}$. 类似可以定义 $(x\geqslant c)$，

收稿日期： 2013－04－13　　　***通信作者：** 陶元红(1973—)，女，博士，副教授，研究方向为泛函分析及其应用.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11361065,11161049)；吉林省自然科学基金资助项目(201215239)

$(x<c)$，$(x>c)$ 等.

定义 1[1]　设 Ω 是 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}[-k,\infty)$ 的一个子集，若上、下极限 $\mu_*(\Omega)=\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\Omega^{(n)}|}{n}$ 和 $\mu^*(\Omega)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{|\Omega^{(n)}|}{n}$ 存在，则称 $\mu_*(\Omega)$ 和 $\mu^*(\Omega)$ 分别为集合 Ω 的下频率测度和上频率测度. 特别地，若 $\mu_*(\Omega)=\mu^*(\Omega)=\mu(\Omega)$，则称 $\mu(\Omega)$ 为 Ω 的频率测度，也称 Ω 是频率可测的；若 Ω 不是可测的，则称 Ω 不可测.

显然，Ω 的频率测度能表示集合 Ω 的元素个数在自然数集 $\mathbf{N}$ 中所占的“比例”的大小. 对任意 $\Omega\subseteq\mathbf{N}$，$\mu_*(\Omega)$ 和 $\mu^*(\Omega)$ 都存在，且 $0\leqslant\mu_*(\Omega)\leqslant\mu^*(\Omega)\leqslant1$，当 Ω 是有限集合时，$\mu(\Omega)=0$，$\mu(N)=1$，$\mu(\varnothing)=0$.

定义 2[4]　设 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一实数列，$I\subseteq\mathbf{R}$，如果存在一个常数 $\omega\in[0,1]$，使得 $\mu^*(X\notin I)\leqslant\omega$（或 $\mu_*(X\in I)\geqslant1-\omega$），则称 X 为上频率 ω 度属于区间 I.

定义 3[1]　设 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一实数列，a 是一个常数. 如果对任意 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $\omega\in[0,1)$，使得 $\mu^*(|X-a|\geqslant\varepsilon)\leqslant\omega$（或 $\mu_*(|X-a|<\varepsilon)>1-w$），则称 X 是(至多)ω 度上频率收敛于实数 a，a 称为 X 的(至多)ω 度上频率极限.（至多）下频率极限和频率极限可类似定义.

关于频率测度和频率收敛的一些性质，详见文献[1-4].

2　主要结果及其证明

给定初始值 x_0,x_1 后，利用方程(1) 递推而确定的数列 $X=\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 称为由初始值 x_0,x_1 确定的方程(1) 的解. 显然，当初始值 $x_0=x_1=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ 时，对任意 $n>0$，均有 $x_n=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，即差分方程(1) 的解是常数列 $X=\{\dfrac{\sqrt5-1}{2}\}_{n=2}^{\infty}$. 若初始值 x_0 和 x_1 均不等于 $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，则有如下结论：

定理 1　若初始值 $x_0,x_1\in[0,1]$，且 $x_0\neq\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，$x_1\neq\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，则由初始值 x_0,x_1 确定的方程(1) 的解 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在两个 0.5 度频率极限 0 和 1.

证明　证明可分为如下 3 种情况讨论：

① $x_0\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$，$x_1\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$；

② $x_0\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},1]$，$x_1\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},1]$；

③ $x_0\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$，$x_1\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},1]$ 或 $x_0\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},1]$，$x_1\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$.

首先设多项式 $G(t)=H(t)-t=1-t-(1-t^2)^2$，其中 $H(u)=1-(1-u^2)^2$. 令 $G(t)=0$，解得 $t_1=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$，$t_2=0$，$t_3=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$，$t_4=1$. 根据其导函数 $G'(t)=-1+4t-4t^3$，令 $G'(t)=0$，可解得 3 个不同根 γ，α 和 β，其中 $\gamma\in(-\infty,-\sqrt3/3)$，$\alpha\in[0,\sqrt3/3)$，$\beta\in(\sqrt3/3,1]$，$\gamma<0<\alpha<\beta$. 通过分析，易知：

$$\begin{cases} t\geqslant1-(1-t^2)^2,\ t\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2});\\ t\leqslant1-(1-t^2)^2,\ t\in(\dfrac{\sqrt5-1}{2},1]. \end{cases}$$

下面就以上 3 种情况分别给出证明.

第 1 种情况：设 $x_0\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$，$x_1\in[0,\dfrac{\sqrt5-1}{2})$，则 $0\leqslant x_0^2<(\dfrac{\sqrt5-1}{2})^2=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$，从而 $0\geqslant-$

$x_0^2>\frac{\sqrt{5}-3}{2}$，于是有 $1\geqslant x_2=1-x_0^2>1+\frac{\sqrt{5}-3}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，即 $x_2\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$. 同理可得 $x_3\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$. 又由 $x_4=1-x_2^2$，$x_5=1-x_3^2$，可得 $x_4\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，$x_5\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$. 由(1)式可得：

$$x_{n+4}=1-x_{n+2}^2=1-(1-x_n^2)^2,\ n=0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

因为 $x_{4n}\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，$n=0,1,2,\cdots$，显然有不等式 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>x_0\geqslant 1-(1-x_0^2)^2=x_4\geqslant\cdots\geqslant x_{4n-4}\geqslant 1-(1-x_{4n-4}^2)^2=x_{4n}\geqslant\cdots\geqslant 0$ 成立. 令 $y_n=x_{4n}$，$n=0,1,2\cdots$，则 $\{y_n\}$ 是单调递减的有界数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_*\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$. 下面证明 $y_*=0$. 为方便起见，将(2)式写成 $y_n=H(y_{n-1})$，$n=1,2,3\cdots$，其中 $H(u)=1-(1-u^2)^2$，$G(t)=H(t)-t=1-t-(1-t^2)^2$. 显然 $G(t)=0$ 在 $t\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ 上只有一个解 0. 又由(2)式得 $y_*=1-(1-y_*^2)^2$，即 $G(y_*)=0$，于是 $y_*=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n}=0$.

因为 $x_{4n+1}\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，$n=0,1,2,\cdots$，显然有不等式 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}>x_1\geqslant 1-(1-x_1^2)^2=x_5\geqslant\cdots\geqslant x_{4n-3}\geqslant 1-(1-x_{4n-3}^2)^2=x_{4n+1}\geqslant\cdots\geqslant 0$ 成立. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+1}=0$.

因为 $x_{4n+2}\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，$n=0,1,2,\cdots$，显然有不等式 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x_2\leqslant 1-(1-x_2^2)^2=x_6\leqslant\cdots\leqslant x_{4n-2}\leqslant 1-(1-x_{4n-2}^2)=x_{4n+2}\leqslant\cdots\leqslant 1$ 成立. 令 $z_n=x_{4n+2}$，$n=0,1,2\cdots$，则 $\{z_n\}$ 是单调递增的有界的数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_*\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$. 下面证明 $z_*=1$. 为方便起见，将(2)式写成如下形式：

$$z_n=H(z_{n-1}),\ n=1,2,3\cdots. \tag{3}$$

显然 $G(t)=0$ 在 $t\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$ 上只有一个解 1. 又由(2)式得 $z_*=1-(1-z_*^2)^2$，即 $G(z_*)=0$，于是 $z_*=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+2}=1$.

因为 $x_{4n+3}\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，$n=0,1,2,\cdots$，显然不等式 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x_3\leqslant 1-(1-x_3^2)^2=x_7\leqslant\cdots\leqslant x_{4n-1}\leqslant 1-(1-x_{4n-1}^2)=x_{4n+3}\leqslant\cdots\leqslant 1$ 成立. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+3}=1$.

通过以上证明得到：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+1}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{4n+3}=1$. 显然，初始值 x_0，x_1 确定的方程(1)的解 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在两个 0.5 度频率极限 0 和 1.

第 2 种情况：设 $x_0\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，$x_1\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，则 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x_0^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant -x_0^2<\frac{\sqrt{5}-3}{2}$，于是有 $0\leqslant x_2=1-x_0^2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，同理可得 $0\leqslant x_3=1-x_1^2<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 因为 $x_0\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，$x_1\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$，$x_2\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，$x_3\in[0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$，则显然有如下不等式成立：

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x_0\leqslant 1-(1-x_0^2)^2=x_4\leqslant\cdots\leqslant x_{4n-4}\leqslant 1-(1-x_{4n-4}^2)=x_{4n}\leqslant\cdots\leqslant 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x_1\leqslant 1-(1-x_1^2)^2=x_5\leqslant\cdots\leqslant x_{4n-3}\leqslant 1-(1-x_{4n-3}^2)=x_{4n+1}\leqslant\cdots\leqslant 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}>x_2\geqslant 1-(1-x_2^2)^2=x_6\geqslant\cdots\geqslant x_{4n-2}\geqslant 1-(1-x_{4n-2}^2)^2=x_{4n+2}\geqslant\cdots\geqslant 0,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} > x_3 \geqslant 1-(1-x_3^2)^2 = x_7 \geqslant \cdots \geqslant x_{4n-1} \geqslant 1-(1-x_{4n-1}^2)^2 = x_{4n+3} \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

类似第 1 种情况的讨论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+3}=0$. 显然,初始值 x_0, x_1 确定的方程(1) 的解 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在两个 0.5 度频率极限 0 和 1.

第 3 种情况:设 $x_0 \in [0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $x_1 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$, 则 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_2 = 1-x_0^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_3 = 1-x_1^2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 因为 $x_0 \in [0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $x_1 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$, $x_2 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$, $x_3 \in [0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, 则显然有如下不等式成立:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} > x_0 \geqslant 1-(1-x_0^2)^2 = x_4 \geqslant \cdots \geqslant x_{4n-4} \geqslant 1-(1-x_{4n-4}^2)^2 = x_{4n} \geqslant \cdots \geqslant 0,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_1 \leqslant 1-(1-x_1^2)^2 = x_5 \leqslant \cdots \leqslant x_{4n-3} \leqslant 1-(1-x_{4n-3}^2) = x_{4n+1} \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < x_2 \leqslant 1-(1-x_2^2)^2 = x_6 \leqslant \cdots \leqslant x_{4n-2} \leqslant 1-(1-x_{4n-2}^2) = x_{4n+2} \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} > x_3 \geqslant 1-(1-x_3^2)^2 = x_7 \geqslant \cdots \geqslant x_{4n-1} \geqslant 1-(1-x_{4n-1}^2)^2 = x_{4n+3} \geqslant \cdots \geqslant 0.$$

类似前 2 种情况讨论可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4n+3}=0$. 显然,初始值 x_0, x_1 确定的方程(1) 的解 $X=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 存在两个 0.5 度频率极限 0 和 1. 若 $x_0 \in (\frac{\sqrt{5}-1}{2},1]$, $x_1 \in [0,\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, 则结果完全类似.

综上,定理结论成立.

参考文献:

[1] TIAN Chuanjun, XIE Shengli, CHENG Suisun. Measures for oscillatory sequences[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1998,36(10-12):149-161.

[2] 田传俊. 频率测度论[M]. 北京:科学出版社,2010.

[3] ZHU Zhiqiang, CHENG Suisun. Frequently oscillatory solution of neutral difference equation[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2005,13(29):624-634

[4] TIAN Chuanjun, CHENG Suisun. Frequent convergence and applications[J]. Mathematical Analysis, 2006,23(13):653-668.

[5] TIAN Chuanjun, CHENG Suisun, Mehmet Gurdal. Necessary and sufficient conditions for frequent cauchy sequences[J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2009,2(2):289-299.

[6] TAO Yuanhong, LI Xiudong. Frequently oscillatory solutions for nonlinear delay partial difference equations[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2011,27(5):591-602.

[7] 陶元红,吴冬梅. 一类中立型差分方程的频率振动性[J]. 延边大学学报:自然科学版,2011,37(1):42-45.

[8] 陶元红,郑菊花. 系数可变号的非线性偏差分方程的频密振动解[J]. 北华大学学报:自然科学版,2011,12(6):632-636.

[9] 吴冬梅,陶元红. 带有正负系数的非线性偏差分方程的不饱和解[J]. 海南师范大学学报:自然科学版,2011,24(4):354-358.

[10] LIU Shutang, ZHANG Binggen. Oscillation behavior of delay partial difference equations with positive and negative coefficients[J]. Computers Math Applic, 2002,11(43):915-964.

[11] LIU Shutang, HAN Zhongyue. Osciallation of delay partial difference equations with positive and negative coefficients[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2003,27(1):811-824.

[12] TIAN Chuanjun. New concepts for sequences and discrete systems(I), dynamics of continuous, discrete and impulsive systems series A[J]. Mathematical Analysis, 2008,15(5):671-710.