一类分数阶泛函差分边值问题解的存在性

吴双， 慎闯， 侯成敏*
（延边大学理学院 数学系，吉林 延吉 133002）

摘要：研究了一类离散分数阶边值问题解的存在性.首先给出了该问题的解的表达式，再根据解的表达式定义一个算子，通过运用已知定理证明了此类边值问题解的存在性，然后将所得结论推广到高阶分数阶方程边值问题.

关键词：分数阶泛函差分方程；边值问题；不动点
中图分类号：O175 **文献标识码**：A

The existence of solution for a class of fractional functional difference boundary value problem

WU Shuang， SHEN Chuang， HOU Chengmin*
（*Department of Mathematics*，*College of Science*，*Yanbian University*，*Yanji* 133002，*China*）

Abstract：We consider the existence of the solution for a class of discrete fractional boundary value problem. First we present the expressions of its solutions，and we define an operator by using the expression. Next we prove the existence of solutions for such boundary value problems by applying given theorem，and generalize the conclusion to higher order boundary value problems.

Key words：fractional functional difference equation；boundary value problem；fixed point

差分方程广泛应用于各领域，如计算机科学、动力系统、机械系统及经济系统等.近年来，由于分数阶差分方程模型的不断出现以及对微分方程近似计算的需要，分数阶差分方程逐渐成为学者们关注的研究课题，其基础理论也得到了进一步的发展.例如：文献[1-2]分别研究了离散型分数阶微积分初值问题和有限分数阶差分方程的两点边值问题；C. S. Goodrich [3]研究了带有非局部条件的离散型分数阶边值问题解的存在性和唯一性；文献[4-5]分别对正定非线性项的差分边值问题进行了研究，得到了正定差分边值问题正解的存在性；文献[6-7]分别对非线性项具有混合单调性的差分方程正解的存在性进行了研究. Miller 和 Ross[9]最先对有限分数阶差分问题进行了研究，但目前为止，相关结果并不多.最近，文献[10]的作者进一步研究了有限分数阶差分问题，并提供了一种改进的方法.本文将对一类分数阶泛函差分方程边值问题(1)—(3)的解的存在性进行研究.

本文考虑如下的离散分数阶方程边值问题：

$$\Delta^{\nu}x(t)=f(t+\nu-1,x_{t+\nu-2},\Delta x(t+\nu-2)),\ t\in[0,T+1]_{\mathbf{N}_0};\tag{1}$$

$$x(s+\nu-2)=\varphi(s+\nu-2),\ s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}};\tag{2}$$

$$x(T+\nu+1)=A.\tag{3}$$

其中 $f:[\nu-1,T+\nu]_{\mathbf{N}_{\nu-1}}\times F_N\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，且 $\varphi\in F_N$，$F_N=\{x\,|\,x:[-N+\nu-2,\nu-2]_{\mathbf{N}_{-N+\nu-2}}\to\mathbf{R}\}$，$1<\nu<2$，$A\in\mathbf{R}$.

收稿日期：2013-04-26 **基金项目**：国家自然科学基金资助项目(11161049)
*__通信作者__：侯成敏(1963—)，女，教授，研究方向为微分方程与离散动力系统.

1 预备知识

给定整数 a 和 b，且 $a<b$. 设 $1<\nu<2$，记 $[a+v-1,b+v-1]_{\mathbf{N}_{a+\nu-1}}=\{a+\nu-1,a+\nu,\cdots,b+\nu-1\}$; $[a+\nu-1,b+\nu-1)_{\mathbf{N}_{a+\nu-1}}=\{a+\nu-1,a+\nu,\cdots,b+\nu-2\}$. 设函数 $z:[a+\nu-1,b+\nu-1]_{\mathbf{N}_{a+\nu-1}}\to\mathbf{R}$，定义其在 $[a+\nu-1,b+\nu-1]_{\mathbf{N}_{a+\nu-1}}$ 上的模为 $\|z\|=\max\limits_{s\in[a+\nu-1,b+\nu-1]_{\mathbf{N}_{a+\nu-1}}}|z(s)|$. 给定两个自然数 T 和 N，且 $T>N$. 定义泛函空间 $F_N=\{x\,|\,x:[-N+\nu-2,\nu-2]_{\mathbf{N}_{N+\nu-2}}\to\mathbf{R}\}$，易证 F_N 为 Banach 空间，且对于任意 $z:[-N+\nu-2,T+\nu]_{\mathbf{N}_{-N+\nu-2}}\to\mathbf{R}$, $t\in[0,T+2]_{\mathbf{N}_0}$ 和 $z_{t+\nu-2}\in F_N$，定义 $z_{t+\nu-2}(s)=z(t+s)$, $s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}}$.

定义1[1] f 的 ν 阶分数和定义为 $\Delta_a^{-\nu}f(t)=\Delta_a^{-\nu}f(t;a):=\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\sum\limits_{s=a}^{t-\nu}(t-s-1)^{\underline{\nu-1}}f(s)$，其中 $\nu>0$，$t\in N_{a+\nu}$. ν 阶分数差分定义为 $\Delta^{-\nu}f(t):=\Delta^N\Delta^{\nu-N}f(t)$，其中 $\nu>0$，$t\in N_{a+N-\nu}$ (N 为自然数满足 $0\leqslant N-1<\nu\leqslant N$).

引理1[1] 设 $0\leqslant N-1<\nu\leqslant N$，有 $\Delta^{-\nu}\Delta^{\nu}y(t)=y(t)+C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}+\cdots+C_Nt^{\underline{\nu-N}}$，其中 $C_i\in\mathbf{R}$，$1\leqslant i\leqslant N$.

引理2[2] 令 C 为一个带有模的线性空间 E 的凸子集，并设 $0\in C$; 设 $F:C\to C$ 是一个完全连续的算子，并令 $\varepsilon(F)=\{x\in C\,|\,x=\lambda Fx,\forall\lambda\in(0,1)\}$，则 $\varepsilon(F)$ 是无界的，或者 F 有一个不动点.

2 主要结果及其证明

定理1 设 $f:[0,T+1]_{\mathbf{N}_0}\times F_N\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，则函数 $x(t)$ 是差分方程(1)带有边界条件(2)和(3)的解的充要条件是 $x(t)$ 有以下形式：

$$x(t)=\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))+\frac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}-\frac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-1}}}{(T+3)\Gamma(\nu-1)}+\frac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-1)},$$

其中 $$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(t-s-1)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}-\dfrac{\Gamma(T+3)(T+\nu-s)^{\underline{\nu-1}}t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(T+\nu+2)},&(t,s)\in T_1;\\[2ex]\dfrac{\Gamma(T+3)(T+\nu-s)^{\underline{\nu-1}}t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)\Gamma(T+\nu+2)},&(t,s)\in T_2,\end{cases}$$

$$T_1=\{(t,s)\in[\nu-2,T+\nu+1]_{N_{\nu-2}}\times[0,T+1]_{N_0}:0\leqslant s<t-\nu+1\leqslant T+2\},$$
$$T_2=\{(t,s)\in[\nu-2,T+\nu+1]_{N_{\nu-2}}\times[0,T+1]_{N_0}:0\leqslant t-\nu+1\leqslant s\leqslant T+2\}.$$

证明 由引理1，可得 $\Delta^{-\nu}\Delta^{\nu}x(t)=\Delta^{-\nu}f(t+\nu-1,x_{t+\nu-2},\Delta x(t+\nu-2))=x(t)+C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}$，则 $x(t)=\Delta^{-\nu}f(t+\nu-1,x_{t+\nu-2},\Delta x(t+\nu-2))+C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}$，再由边值条件(2)得到 $C_2=\dfrac{\varphi(\nu-2)}{\Gamma(\nu-1)}$. 利用边界条件(3)，$t=T+\nu+1$ 时，有 $x(T+\nu+1)=[\Delta^{-\nu}f(t+\nu-1,x_{t+\nu-2},\Delta x(t+\nu-2))+C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}]_{t=T+\nu+1}=A$，因此 $C_1=[A-\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\sum\limits_{s=0}^{T+1}(T+\nu-s)^{\underline{\nu-1}}f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))-\dfrac{\varphi(\nu-2)\Gamma(T+\nu+2)}{\Gamma(\nu-1)\Gamma(T+4)}]\dfrac{\Gamma(T+3)}{\Gamma(T+\nu+2)}$. 从而得到满足条件(2)和(3)的方程(1)的解 $x(t)=\sum\limits_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}-\dfrac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-1}}}{(T+3)\Gamma(\nu-1)}+\dfrac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-1)}$.

定义变换 S 如下：

$$Sx(t)=\begin{cases}\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}-\dfrac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-1}}}{(T+3)\Gamma(\nu-1)}+\\ \qquad\dfrac{\varphi(\nu-2)t^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-1)},\ t\in[\nu-2,T+\nu+1]_{\mathbf{N}_{\nu-2}};\\ \varphi(t),\ t\in[-N+\nu-2,\nu-2]_{\mathbf{N}_{-N+\nu-2}}.\end{cases}$$

定理 2　令 $f:[0,T+1]\times F_N\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，若对于任意的 $0<\lambda<1$，存在 $M>0$，使对于满足条件(5)和(6)的方程(4)的解 x，有 $\|x\|_{[\nu-2,T+\nu+1]_{\mathbf{N}_{\nu-2}}}\leqslant M$，则边值问题(1)—(3)至少有一个解.

$$\Delta^\nu x(t)=\lambda f(t+\nu-1,x_{t+\nu-2},\Delta x(t+\nu-2)),\ t\in[0,T+1]_{\mathbf{N}_0};\tag{4}$$

$$x(s+\nu-2)=\varphi(s+\nu-2),\quad s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}};\tag{5}$$

$$x(T+\nu+1)=\lambda A.\tag{6}$$

证明　当 $\lambda=0$ 时，边值问题(4)—(6)即为(1)—(3). 不妨设 $\lambda\neq0$，则证明过程分为 $\varphi(\nu-2)=0$ 和 $\varphi(\nu-2)\neq0$ 两种情况.

1) 当 $\varphi(\nu-2)=0$ 时，定义泛函空间 $E=\{x\,|\,x:[\nu-2,T+\nu+1]_{\mathbf{N}_{\nu-2}}\to\mathbf{R}\}$ 和其上元素 x 的模 $\|x\|_{[\nu-2,T+\nu+1]_{\mathbf{N}_{\nu-2}}}$，并设子集 $C=\{x\in E\,|\,x(\nu-2)=0\}$. 因为对于 $\forall x,y\in C$ 有 $[\lambda x+(1-\lambda)y](\nu-2)=\lambda x(\nu-2)+(1-\lambda)y(\nu-2)=0$，从而 $\lambda x+(1-\lambda)y\in C$，所以 C 为凸子集. 定义算子 $H:C\to E$ 为 $Hx(t)=\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}$，$t\in[\nu-2,T+\nu]_{\mathbf{N}_{\nu-2}}$，其中 $x_s(\theta)=\begin{cases}x(s+\theta),\ s+\theta\geqslant0;\\ \varphi(s+\theta),\ s+\theta<0.\end{cases}$ 由于对 $\forall x\in C$ 有 $x(\nu-2)=0$，则有 $Hx(\nu-2)=\sum_{s=0}^{T+1}G(\nu-2,s)f(s+\nu-1,x_{s+\nu-2},\Delta x(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)(\nu-2)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}=0$，所以 $H(C)\subseteq C$. 又因为 f 是连续的，所以 F 也是连续的. 为了证明 $H:C\to E$ 是紧的，取 C 中有界序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$，显然存在一个子序列 $\{x_{kj}\}$ 和 $\bar{x}\in C$，使得 $x_{kj}(t)\to\bar{x}(t)$，因此 $H(x_{kj}(t))=\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,{x_{kj}}_{s+\nu-2},\Delta x_{kj}(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}\to\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)f(s+\nu-1,\bar{x}_{s+\nu-2},\Delta\bar{x}(s+\nu-2))+\dfrac{A\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}=H\bar{x}(t)$，由此可知 $H:C\to E$ 是完全连续的. 又由(4)—(6)式知，$\varepsilon(H)=\{x\in C\,|\,x=\lambda Hx,\forall\lambda\in(0,1)\}$ 是有界集. 再利用引理 2 得 $H:C\to E$ 的一个不动点 $\bar{x}\in C$，则函数 $z(t)=\begin{cases}x(t),\ t\in[\nu-2,T+\nu+1]_{\mathbf{N}_{\nu-2}};\\ \varphi(t),\ t\in[-N+\nu-2,\nu-2]_{\mathbf{N}_{-N+\nu-2}}\end{cases}$ 是边值问题(1)—(3)的一个解.

2) 当 $\varphi(\nu-2)\neq0$ 时，令 $y=x-\varphi(\nu-2)$，那么

$$\Delta^\nu y(t)=\Delta^\nu(x(t)-\varphi(\nu-2))=\Delta^\nu x(t)-\Delta^\nu\varphi(\nu-2)\equiv\bar{f}(t+\nu-1,y_{t+\nu-2},\Delta y(t+\nu-2));\tag{7}$$

$$y(s+\nu-2)=\varphi(s+\nu-2)-\varphi(\nu-2)\equiv\bar{\varphi}(s+\nu-2),\ s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}};\tag{8}$$

$$y(T+\nu+1)=A-\varphi(\nu-2)\equiv\bar{A}.\tag{9}$$

(7)—(9)式的解 $y(t)=\sum_{s=0}^{T+1}G(t,s)\bar{f}(s+\nu-1,y_{s+\nu-2},\Delta y(s+\nu-2))+\dfrac{\bar{A}\Gamma(T+3)t^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(T+\nu+2)}$. 运用 $\varphi(\nu-2)=0$ 时的证明方式，可知 $x(t)=y(t)+\varphi(\nu-2)$ 是边值问题(1)—(3)的一个解.

下面讨论高阶离散分数阶方程边值问题(10)—(12)，其中 $N-1<\nu<N$.

$$\Delta^\nu x(t)=f(t+\nu-N+1,x_{t+\nu-N},\cdots,\Delta^{N-1}x(t+\nu-N)),\ t\in[0,T+1]_{\mathbf{N}_0};\tag{10}$$

$$x(s+\nu-N)=\varphi(s+\nu-N),\ s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}};\tag{11}$$

$$\Delta^{i}x(T+\nu+3-N)=A_i,\ i=0,1,2,\cdots,N-2. \tag{12}$$

类似于定理 2,得以下定理:

定理 3 令 $f:[0,T+1]\times\bar{F}_N\times\mathbf{R}^{n-1}\to\mathbf{R}$ 是连续的,若对于任意的 $0<\lambda<1$,存在 $M>0$,使对于边值问题(13)—(15) 的解 x,有 $\|x\|_{[\nu-2,T+\nu+1]}\leqslant M$,则边值问题(10)—(12) 至少有一个解.

$$\Delta^{\nu}x(t)=\lambda f(t+\nu-N+1,x_{t+\nu-N},\cdots,\Delta^{N-1}x(t+\nu-N)),\ t\in[0,T+1]_{\mathbf{N}_0}; \tag{13}$$

$$x(s+\nu-N)=\varphi(s+\nu-N),\ s\in[-N,0]_{\mathbf{N}_{-N}}; \tag{14}$$

$$\Delta^{i}x(T+\nu+3-N)=\lambda A_i,\ i=0,1,2,\cdots,N-2. \tag{15}$$

其中 $\bar{F}=\{x\mid x:[\nu-2N,\nu-N]_{\mathbf{N}_{\nu-2N}}\to\mathbf{R}\}$.

证明 先求解边值问题(10)—(12),由引理 1 知其解为

$$x(t)=\Delta^{-\nu}f(t+\nu-N+1,x_{t+\nu-N},\cdots,\Delta^{N-1}x(t+\nu-N))+C_1t^{\underline{\nu-1}}+C_2t^{\underline{\nu-2}}+\cdots+C_Nt^{\underline{\nu-N}}, \tag{16}$$

由边界条件(14)得 $C_N=\dfrac{\varphi(\nu-N)}{\Gamma(\nu-N+1)}$. 再根据边界条件(15),可以求得 $C_1,C_2,\cdots,C_{N-1}$ 皆为带有 $\varphi(\nu-N)$ 的常数,所以(16) 式可以化为 $x(t)=\Delta^{-\nu}f(t+\nu-N+1,x_{t+\nu-N},\cdots,\Delta^{N-1}x(t+\nu-N))+B_1t^{\underline{\nu-1}}+\cdots+B_{N-1}t^{\underline{\nu-N+1}}+\varphi(\nu-N)\left[B_1t^{\underline{\nu-1}}+\cdots+\dfrac{t^{\underline{\nu-N}}}{\Gamma(\nu-N+1)}\right]$,其中 $B_1,B_2,\cdots,B_{N-1}$ 为不带有 $\varphi(\nu-N)$ 的常数. 再利用类似于定理 2 的证明,即证得结论.

参考文献:

[1] Atici F M, Eloe P W. Initial value problems in discrete fractional calculus[J]. Proc Amer Math Soc, 2009,137(3):981-989.

[2] Atici F M, Eloe P W. Two-point boundary value problems for finite fractional difference equations[J]. J Difference Equ Appl, 2011,17(4):445-456.

[3] Goodrich C S. Existence and uniqueness of solutions to a fractional difference equation with nonlocal conditions[J]. J Comput Math Appl, 2011,61(21):191-202.

[4] Li W T, Niu M F, Sun J P. Existence of positive solutions of boundary value problems for second-order nonlinear difference systems[J]. Appl Math Comp, 2004,152:779-798.

[5] Sun J P, Li W T. Existence of positive solutions of boundary value problems for a discrete difference system[J]. Appl Math Comp, 2004,156:857-870.

[6] Chen F Q. Existence of solutions for mixed monotone impulsive volterra integral equations in Banach spaces[J]. Acta Math Sci, 1998,18:371-378.

[7] Chen F Q. Extreme solutions of initial value problems for nonlinear second order integro differential equations in Banach spaces[J]. Acta Math Appl Sinica, 2001,17:289-298.

[8] Atici F M, Eloe P W. Initial value problems in discrete fractional calculus[J]. Proc Amer Math Soc, 2009,137:981-989.

[9] Miller K S, Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: Wiley, 1993.

[10] Atici F M, Eloe P W. A transform method in discrete fractional calculus[J]. Int J Difference Equ, 2007,2(2):165-176.