

文章编号: 1004-4353 (2024) 02-0001-07

基于 3 种信道的量子相干动态不确定性关系研究

刘禹彤, 容诗琪, 姜英秀, 金艳

(延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘要: 为探究去极化信道、比特相位翻转信道、相位阻尼信道这 3 种信道对量子态相干性的影响, 首先基于两组规范正交基, 推导出了初始态和经过这些信道后输出态的 l_1 范数相干和的解析表达式, 并研究了量子相干和在不同信道下的动态变化. 研究表明, 在量子信息传输过程中, 可以通过改善信道环境提升量子态的相干和的表现. 该结果可为量子信息处理和量子通信领域的研究提供参考.

关键词: 量子相干; 去极化信道; 比特相位翻转信道; 相位阻尼信道; 不确定关系

中图分类号: O177.92 **文献标志码:** A

Research of quantum coherent dynamic uncertainty relations based on three channels

LIU Yutong, RONG Shiqi, JIANG Yingxiu, JIN Yan

(College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In order to investigate the effects of depolarisation channel, bit phase-flip channel and phase-damped channel three channels on the quantum coherence, firstly, analytic expressions for the l_1 norm coherent sum of the initial state and the output state through these channels are derived based on two sets of canonical orthogonal bases. Furthermore, the dynamic change of the quantum coherent sum under different channels is studied. It is shown that during the process of quantum information transmission, the coherence and performance of quantum can be improved by optimizing the channel environment. The results can provide valuable references for research in quantum information processing and quantum communication.

Keywords: quantum coherence; depolarisation channel; bit phase-flip channel; phase damped channel; uncertainty relation

0 引言

量子相干性是量子力学中一种重要的物理资源, 它为研究多粒子干涉和量子纠缠等提供了有效的方法^[1]. 近年来, 许多学者从资源理论的角度对量子态的相干性进行了大量研究^[2-3]. 2014 年 Baumgratz 等^[4]提出了一种量化相干性的严格框架, 并基于这一相干框架提出了一些不同的相干度量, 如 l_1 范数相干、相对熵相干、基于斜信息的量子相干以及几何相干等. 鉴于量子态的相干性会受到参考基选择的影响, 因此一些学者探讨了不同基下相干性之间的关联与差异. 例如, Cheng 等^[5]基于无偏基 (MUB) 研究了两

投稿日期: 2024-03-24

基金项目: 2024 年延边大学科技发展计划项目 (一类量子态的关联性和量子测量的相干性的量化)

第一作者: 刘禹彤 (2002—), 男, 硕士研究生, 研究方向为应用泛函分析.

通信作者: 金艳 (1986—), 女, 助教, 研究方向为量子信息与量子计算.

种特定相干度量 (l_1 范数相干和相对熵相干), 并给出在任何完备 MUB 集下关于量子位态的两个相干度量间的互补关系. Yuan 等^[6] 基于 l_1 范数相干性度量, 考虑了两个测量基下量子态的相干性, 并推导出基于这两个测量基的量子相干性之和的下界. Sheng 等^[7] 基于 l_1 范数相干度量、斜信息相干度量等在无偏基下研究了相干度量和的不确定关系. 张福刚等^[8] 提出了一种基于 l_1 范数以及相对熵在振幅阻尼信道下的量子相干, 并对其量子不确定性关系进行了研究. 基于上述研究, 本文研究了去极化信道、比特相位翻转信道、相位阻尼这 3 种量子信道对量子相干性的影响, 并分析了基于两个规范正交基的量子态的 l_1 范数相干度量及其动态单调性质.

1 预备知识

一个任意的单比特态可以由如下的矩阵形式表示:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1+z}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{1-z}{2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $t^2 + z^2 \leq 1$. 为研究量子相干与不同信道之间的内在联系, 本文首先给出如下几个量子信道的定义.

定义 1^[9] 量子去极化信道是量子系统中的一种噪声模型, 它可以看作是一个取决于参数 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) 的完全正保迹映射, 其对应的 Kraus 算子 E_i ($i = 0, 1, 2, 3$) 为:

$$E_0 = \sqrt{1-\frac{3}{4}\lambda} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

比特相位翻转信道是比特翻转信道与相位翻转信道的组合形式, 其对应的 Kraus 算子 E_i ($i = 0, 1$) 为:

$$E_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1-\lambda} \\ i\sqrt{1-\lambda} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $0 \leq \lambda \leq 1$.

相位阻尼信道是一种能够描述系统的量子信息损失的信道, 它可使量子比特由叠加态退回为坍缩态, 其对应的 Kraus 算子 E_i ($i = 0, 1$) 为:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix},$$

其中 $0 \leq \lambda \leq 1$.

由式 (1) 给出的初始态 ρ 经过去极化信道 ω 后所得到的态为 $\omega(\rho)$, 由此再根据 $\omega(\rho) = \sum_{i=0}^3 E_i \rho E_i^H$ 可得 $\omega(\rho)$ 的矩阵表达式为:

$$\omega(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z-\lambda z & t(1-\lambda) \\ t(1-\lambda) & 1-z+\lambda z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

初始态 ρ 经过比特相位翻转信道 ψ 后所得到的态为 $\psi(\rho)$, 由此再根据 $\psi(\rho) = \sum_{i=0}^1 E_i \rho E_i^H$ 可得 $\psi(\rho)$ 的矩阵表达式为:

$$\psi(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-z+2\lambda z & t(2\lambda-1) \\ t(2\lambda-1) & 1+z-2\lambda z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

初始态 ρ 经过比特相位翻转信道 ξ 后所得到的态为 $\xi(\rho)$, 由此再根据 $\xi(\rho) = \sum_{i=0}^1 E_i \rho E_i^H$ 可得到 $\xi(\rho)$ 的

矩阵表达式为:

$$\xi(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & t\sqrt{1-\lambda} \\ t\sqrt{1-\lambda} & 1-z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

定义2 (l_1 范数相干)^[4] 设 d 维量子系统对应的 Hilbert 空间的一组基为 $\{|i\rangle\}_{i=1}^d$. 量子态 $\rho = \sum \delta_{i,j} |i\rangle\langle j|$ 的 l_1 范数相干 $C_{l_1}(\rho)$ 是所有非对角线元素的模长之和, 即 $C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\delta_{i,j}|$. 若 ρ 为任意的单比特量子态, 则 l_1 范数相干可以表示为 $C_{l_1}(\rho) = 2|\langle 0|\rho|1\rangle|$, 其中 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 是 \mathbb{C}^2 下的一组标准正交基.

2 3种信道下的量子态基于 l_1 范数的相干和

由于在计算量子态的量子相干过程中需要选取适合的参考基, 为此本文设 H 为一个任意的 Hilbert 空间, $X = \{|X_0\rangle, |X_1\rangle\}$ 、 $Y = \{|Y_0\rangle, |Y_1\rangle\}$ 为该 Hilbert 空间的两组规范正交基. 从标准正交基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 到 X 和 Y 的过渡矩阵分别为 $M(\theta)$ 和 $M(\theta + \varepsilon)$, 其可分别表示为:

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad M(\theta + \varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varepsilon) & -\sin(\theta + \varepsilon) \\ \sin(\theta + \varepsilon) & \cos(\theta + \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

于是有:

$$|X_i\rangle = M(\theta)|i\rangle, \quad |Y_j\rangle = M(\theta + \varepsilon)|j\rangle, \quad (i, j = 0, 1). \quad (6)$$

单比特量子态 ρ 经任一个信道作用后, 其输出态 $\eta(\rho)$ 在 X 基、 Y 基下的量子相干分别为:

$$C_{l_1}^X(\eta(\rho)) = 2|\langle X_0|\eta(\rho)|X_1\rangle|, \quad C_{l_1}^Y(\eta(\rho)) = 2|\langle Y_0|\eta(\rho)|Y_1\rangle|. \quad (7)$$

在规范正交基 X 和 Y 下, 输出态 $\eta(\rho)$ 的量子相干和为:

$$C_{l_1}(\eta(\rho)) = C_{l_1}^X(\eta(\rho)) + C_{l_1}^Y(\eta(\rho)). \quad (8)$$

由式(8)可知, 初始单比特量子态 ρ 在规范正交基 X 和 Y 下, 其 l_1 范数量子相干和为

$$\frac{1}{2}(t \cos 2\theta - z \sin 2\theta + t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)), \quad (t^2 + z^2 \leq 1).$$

命题1 初始单量子比特态 ρ 经过去极化信道后, 其输出态 $\omega(\rho)$ 的 l_1 范数量子相干和 $f(\lambda)$ 为:

$$f(\lambda) = (1 - \lambda)(|t \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|). \quad (9)$$

证明 由式(2)、(6) — (8) 可以计算得:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 2(|\langle X_0|\omega(\rho)|X_1\rangle| + |\langle Y_0|\omega(\rho)|Y_1\rangle|) = \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z-\lambda z & t(1-\lambda) \\ t(1-\lambda) & 1-z+\lambda z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right| + \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varepsilon) & \sin(\theta + \varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z-\lambda z & t(1-\lambda) \\ t(1-\lambda) & 1-z+\lambda z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \varepsilon) \\ \cos(\theta + \varepsilon) \end{pmatrix} \right| = \\ &= (1 - \lambda)(|t \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|). \end{aligned}$$

由上式可知, 命题1得证.

命题2 初始单量子比特态 ρ 经过比特相位翻转信道与相位阻尼信道后, 其输出态 $\psi(\rho)$ 与 $\xi(\rho)$ 的 l_1 范数量子相干和分别为:

$$g(\lambda) = |(2\lambda - 1)(t \cos 2\theta - z \sin 2\theta)| + |(2\lambda - 1)(t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon))|, \quad (10)$$

$$h(\lambda) = |t\sqrt{1-\lambda} \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t\sqrt{1-\lambda} \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|. \quad (11)$$

证明 类似于命题 1 证明, 利用式 (3)、(4)、(6)、(7) 进行计算即可得 $\psi(\rho)$ 与 $\xi(\rho)$ 的 l_1 范数量子相干和.

3 量子相干性在量子信道下的动态分析

3.1 量子相干性在去极化信道、比特相位翻转信道下的动态分析

为了考察去极化信道对初始态 ρ 相干和的影响, 对式 (9) 求导后得 $f(\lambda)$ 的导数为 $f'(\lambda) = -(|t \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|)$. 显然 $f'(\lambda) \leq 0$, 因此初始态 ρ 经过去极化信道作用后, 其 l_1 范数相干和随着 λ 的增加而减小.

为了考察比特相位翻转信道对初始态 ρ 相干和的影响, 对 (10) 式求导得:

$$g'(\lambda) = -2(|t \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|) \leq 0, (\lambda \in [0, \frac{1}{2}]);$$

$$g'(\lambda) = 2(|t \cos 2\theta - z \sin 2\theta| + |t \cos(2\theta + 2\varepsilon) - z \sin(2\theta + 2\varepsilon)|) \geq 0, (\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]).$$

ρ 经过比特相位翻转信道后, 其在 l_1 范数下的相干和在 $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ 时随着 λ 的增加而减少, 在 $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时随着 λ 的增加而增加.

3.2 量子相干性在相位阻尼信道下的动态分析

为讨论初始态 ρ 经过相位阻尼信道后其输出态 $\xi(\rho)$ 的相干和动态变化, 需要以 λ 为自变量对式 (11) 求导. 下面分情况讨论:

情形 1 $tz > 0$.

1) 当 $\tan 2\theta < 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) < 0$ 时, $h'(\lambda) < 0$, 即 ρ 在 l_1 范数下经过相位阻尼信道后, 其输出态 $\eta(\rho)$ 的相干和随着 λ 的增加而减小.

2) 当 $\tan 2\theta > 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) < 0$ 时, 可分为以下两种情形:

当 $\sqrt{1-\lambda} > \frac{z}{t} \tan 2\theta$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t} \tan 2\theta$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta + 2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta + 2\varepsilon)|. \end{cases}$

3) 当 $\tan 2\theta < 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) > 0$ 时, 可分为以下两种情形:

当 $\sqrt{1-\lambda} > \frac{z}{t} \tan(2\theta + 2\varepsilon)$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t} \tan(2\theta + 2\varepsilon)$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta + 2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta + 2\varepsilon)|. \end{cases}$

4) 当 $\tan 2\theta > 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) > 0$ 时, 可分为以下两种情形:

(i) 若 $\cos 2\theta \cos(2\theta + 2\varepsilon) > 0$, 则有:

当 $\sqrt{1-\lambda} < \min\{\frac{z}{t} \tan 2\theta, \frac{z}{t} \tan(2\theta + 2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) > 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda}$ 在其他范围时, $h'(\lambda) < 0$.

(ii) 若 $\cos 2\theta \cos(2\theta + 2\varepsilon) < 0$, 则有:

当 $\sqrt{1-\lambda} < \min\{\frac{z}{t}\tan 2\theta, \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) > 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} > \max\{\frac{z}{t}\tan 2\theta, \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\frac{z}{t}\tan 2\theta < \sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

当 $\frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon) < \sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan 2\theta$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

情形2 $tz < 0$.

1) 当 $\tan 2\theta > 0$, $\tan(2\theta+2\varepsilon) > 0$ 时, $h(\lambda)$ 的导数 $h'(\lambda) < 0$, ρ 在 l_1 范数下经过相位阻尼信道后, 其输出态 $\eta(\rho)$ 的相干和随着 λ 增加而减小.

2) 当 $\tan 2\theta > 0$, $\tan(2\theta+2\varepsilon) < 0$ 时, 可分为以下两种情形:

当 $\sqrt{1-\lambda} > \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

3) 当 $\tan 2\theta < 0$, $\tan(2\theta+2\varepsilon) > 0$ 时, 可分为以下两种情形:

当 $\sqrt{1-\lambda} > \frac{z}{t}\tan 2\theta$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan 2\theta$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

4) 当 $\tan 2\theta < 0$, $\tan(2\theta+2\varepsilon) < 0$ 时, 可分为以下两种情形:

(i) 若 $\cos 2\theta \cos(2\theta+2\varepsilon) > 0$, 则有:

当 $\sqrt{1-\lambda} < \min\{\frac{z}{t}\tan 2\theta, \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) > 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda}$ 在其他范围时, $h'(\lambda) < 0$.

(ii) 若 $\cos 2\theta \cos(2\theta+2\varepsilon) < 0$, 则有:

当 $\sqrt{1-\lambda} < \min\{\frac{z}{t}\tan 2\theta, \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) > 0$.

当 $\sqrt{1-\lambda} > \max\{\frac{z}{t}\tan 2\theta, \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)\}$ 时, $h'(\lambda) < 0$.

当 $\frac{z}{t}\tan 2\theta < \sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon)$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

当 $\frac{z}{t}\tan(2\theta+2\varepsilon) < \sqrt{1-\lambda} < \frac{z}{t}\tan 2\theta$ 时, $\begin{cases} h'(\lambda) < 0, |\cos 2\theta| < |\cos(2\theta+2\varepsilon)|; \\ h'(\lambda) > 0, |\cos 2\theta| > |\cos(2\theta+2\varepsilon)|. \end{cases}$

由以上可以看出, 初始态经过3个信道后, 所得的量子态基于 l_1 范数下的相干和与所选取的基底和信道参数 λ 密切相关.

4 结果验证

为了更好地验证以上 3 种信道对任意单比特态的 I_1 范数相干和所产生的影响, 本文给出如下例子对其说明.

设 $(t, z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则根据式 (1) 可得其对应的单比特态为 $\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. 对于去极化信道与比特相位

翻转信道, 将式 (5) 中 $(\theta, \varepsilon) = (\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{12})$ 的两组规范正交基带入式 (9) 和式 (10) 中可分别得到其输出态的 I_1 范数量子相干和 $f(\lambda)$ 、 $g(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}(1-\lambda) \left(\left| \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right| + \left| \cos \frac{11\pi}{30} - \sin \frac{11\pi}{30} \right| \right), \quad (12)$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{2} \left| (2\lambda-1) \left(\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right) + \frac{1}{2} (2\lambda-1) \left(\cos \frac{11\pi}{30} - \sin \frac{11\pi}{30} \right) \right|. \quad (13)$$

图 1 为 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的图像, 图中虚线表示式 (12), 实线表示式 (13). 由图 1 可以看出: ①初始单量子比特态 ρ 经过去极化信道作用后, 其输出态的相干和随着参数 λ 的增加而减小. ②对于比特相位翻转信道, 其输出态的量子相干和在 $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ 时随着参数 λ 的增大而减小; 当 $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ 时随着参数 λ 的增大而增大, 并且当 λ 处于区间中点时, 相干和为 0.

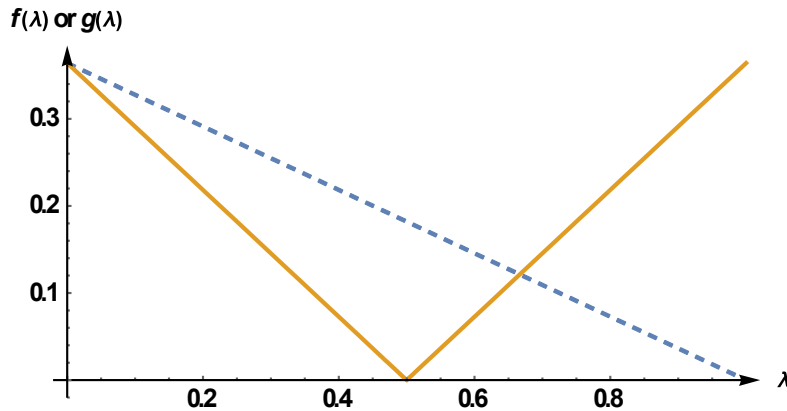


图 1 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ 的图像 ($\lambda \in [0, 1]$)

对于相位阻尼信道, 本文选取两个特殊的情况进行验证.

当 $\tan 2\theta < 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) < 0$ 时, 为验证情形 1 的条件 1), 本文选取 $(\theta, \varepsilon) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{11})$. 将 θ, ε 的取值带入式 (11) 可得:

$$h(\lambda) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{1-\lambda} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right| + \frac{1}{2} \left| \sqrt{1-\lambda} \cos \frac{28\pi}{33} - \sin \frac{28\pi}{33} \right|. \quad (14)$$

当 $\tan 2\theta > 0$, $\tan(2\theta + 2\varepsilon) > 0$ 时, 为验证情形 1 的条件 4), 本文选取 $(\theta, \varepsilon) = (\frac{21\pi}{32}, -\frac{\pi}{64})$. 将 θ 和 ε 带入式 (11) 可得:

$$h(\lambda) = \frac{1}{2} \left| -\sqrt{1-\lambda} \cos \frac{5\pi}{16} + \sin \frac{5\pi}{16} \right| + \frac{1}{2} \left| -\sqrt{1-\lambda} \cos \frac{9\pi}{32} + \sin \frac{9\pi}{32} \right|. \quad (15)$$

图2为 $h(\lambda)$ 的图像,其中虚线为式(14)中 $h(\lambda)$ 的图像,实线为式(15)中 $h(\lambda)$ 的图像.由图2可看出,相位阻尼信道可以影响输出态的相干性,即当增大参数 λ 时,输出态的相干性既可能增大,也可能减小.

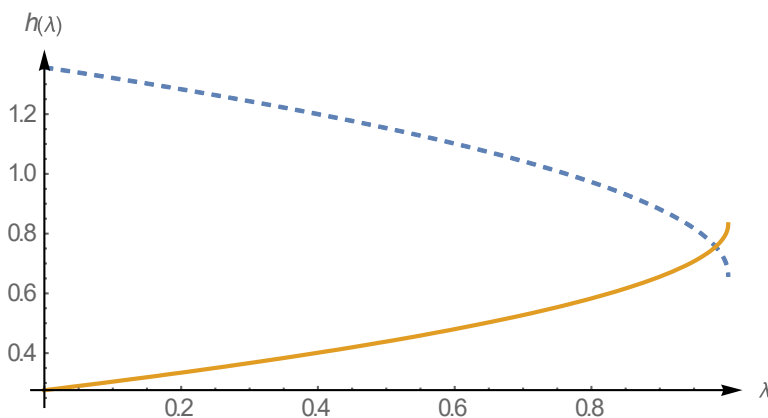


图2 $h(\lambda)$ 的图像 ($\lambda \in [0, 1]$)

5 结论

本文基于3种不同的量子信道,对量子相干性的不确定关系进行了研究.研究表明,通过控制参数 λ 可以有效地调节信道对量子态的量子相干和的影响.这一发现对于调整量子态的相干和,以及预测量子态经过信道作用后的相干性变化,具有一定的参考价值.在本文的研究中仅应用了 l_1 范数相干度量来量化相干,今后我们将在斜信息相干度量、鲁棒相干度量等其他相干度量下研究不同信道对量子态相干性的影响.

参考文献:

- [1] LIU S Y, FAN H. The application of quantum coherence as a resource[J]. Chinese Physics B, 2023, 32(11): 110304.
- [2] 玄东平, 胡晓会, 南华. 基于 l_1 范数相干度的量子态区分[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2021, 47(2): 131-135.
- [3] XUAN D P, HU X H, NAN H. Quantum coherence via skew information for quantum channels[J]. Quant Inf Proc, 2023, 22(1): 48.
- [4] BAUMGRATZ T, CRAMER M, PLENIO M B. Quantifying coherence[J]. Phys Rev Lett, 2014, 113: 140401.
- [5] CHENG S M, Hall M J W. Complementarity relations for quantum coherence[J]. Phys Rev A, 2015, 92: 042101.
- [6] YUAN X, BAI G, PENG T, et al. Quantum uncertainty relation using coherence[J]. Phys Rev A, 2017, 96: 032313.
- [7] SHENG Y H, ZHANG J, TAO Y H, et al. Applications of quantum coherence via skew information under mutually unbiased bases[J]. Quant Inf Proc, 2021, 20(2): 82.
- [8] ZHANG F G, LI Y M. Quantum uncertainty relations of quantum coherence and dynamics under amplitude damping channel[J]. Chinese Physics B, 2018, 27(9): 090301.
- [9] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M]. New York: Cambridge University Press, 2000.