第 50 卷 第 1 期
2024 年 3 月

延 边 大 学 学 报（自然科学版）
Journal of Yanbian University（Natural Science Edition）

Vol. 50 No. 1
Mar. 2024

文章编号：1004-4353（2024）01-0013-10

逐步 II 型截尾步进应力部分加速寿命试验的统计推断

何剑，蔡静，徐开丽，韩荣，何飞
（贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550000）

摘要： 基于逐步 II 型截尾样本，研究了逆 Rayleigh 分布在步进应力部分加速寿命试验下的统计分析问题 . 首先运用贝叶斯方法、极大似然估计方法和近似极大似然估计方法，得到了未知参数和加速度因子的贝叶斯估计 (BE)、极大似然估计 (MLE) 和近似极大似然估计 (AMLE)，并运用极大似然估计的渐近正态性推导出未知参数和加速因子的渐近置信区间 . 其次，运用贝叶斯理论在平方损失函数和线性指数损失函数下给出了模型参数和加速因子的贝叶斯估计和最大后验密度 (HPD) 置信区间 . 最后，利用蒙特卡罗模拟对 3 种不同估计方法的精度进行了评估 . 数值模拟表明：贝叶斯估计的效果大体上优于极大似然估计和近似极大似然估计的效果；线性指数损失函数下的贝叶斯估计效果要优于平方损失函数下的贝叶斯估计效果；随着样本量的增加，3 种估计方法的均方误差 (MSE) 和平均相对误差 (ARE) 均呈减小趋势；在同一组样本和同一种移除方案中，BE 的 HPD 置信区间长度优于 MLE 的渐近置信区间长度 .

关键词： 逐步 II 型截尾样本；逆 Rayleigh 分布；步进应力部分加速寿命试验；极大似然估计；近似极大似然估计；贝叶斯估计

中图分类号： O213.2　　**文献标志码：** A

Statistical inference of progressive type II censored under step-stress partial accelerated life test

HE Jian，CAI Jing，XU Kaili，HAN Rong，HE Fei
(*School of Data Science and Information Engineerin*，*Guizhou Minzu University*，*Guiyang* 550000，*China*)

Abstract: Based on the progressive type II censored samples，the statistical analysis of the inverse Rayleigh distribution under the step-stress partial accelerated life test is investigated. Firstly，Bayesian estimation (BE)，the maximum likelihood estimation (MLE) and approximate maximum likelihood estimation (AMLE) of unknown parameters and acceleration factors are estiblished by using Bayesian method，maximum likelihood estimation method and approximate maximum likelihood estimation method，and their approximate confidence interval is derived by using the asymptotic normality of maximum likelihood estimation. Secondly，the Bayesian estimation and maximum posterior density (HPD) confidence interval of model parameters and acceleration factors are given by using Bayesian theory under square loss function and linear exponential loss function. Finally，the accuracy of three different estimation methods is evaluated by Monte Carlo simulation. Numerical simulation shows that the effect of Bayesian estimation is generally better than that of MLE and AMLE. The Bayesian estimation effect under the linear exponential loss function is better than that under the square loss function. With the increase of sample size，the mean square error (MSE) and average relative error (ARE) of the three estimation methods demonstrated a decreasing trend. In the same group of samples and removal scheme，the HPD confidence interval length of BE is better than the asymptotic confidence interval length of MLE.

Keywords: progressively type II censored samples；inverse Rayleigh distribution step；stress partial accelerated life test；maximum likelihood estimation；approximate maximum likelihood estimation；Bayesian estimation

投稿日期：2023-12-20
基金项目：国家自然科学基金 (11901134)
第一作者：何剑 (1999—)，男，硕士研究生，研究方向为可靠性统计分析 .
通信作者：蔡静 (1980—)，女，博士，教授，研究方向为可靠性统计分析 .

0 引言

由于使用步进应力部分加速寿命试验 (SSPALT) 方法获得的产品失效数据比其他加速寿命试验方法更为精确和高效,因此其目前被广泛应用于产品的可靠性分析中.为了提高SSPALT的应用范围和预测精度,学者们对SSPALT进行了进一步研究.例如:文献[1]的作者在自适应逐步II混合截尾和逐步II混合截尾下,基于SSPALT讨论了Burr-XII分布的统计分析问题;文献[2]的作者在逐步II型截尾下,基于SSPALT讨论了Maxwell Boltzmann分布的参数估计以及加速因子参数估计;文献[3]的作者在广义逐步混合截尾下,研究了SSPALT模型中参数的点估计和区间估计以及加速因子的估计问题;文献[4-6]的作者在逐步II型截尾样本下,基于SSPALT讨论了线性指数分布、指数威布尔分布和逆Kumaraswamy分布的统计分析;文献[7]的作者基于SSPALT模型,研究了NH分布在两种不同截尾样本下的参数估计问题;文献[8]的作者在逐步混合截尾和自适应逐步混合截尾方案下,基于SSPALT和经典估计方法对林德利半Logistic (OLiHL)分布的参数和加速因子进行了估计;文献[9]的作者在自适应逐步II型混合截尾样本下,基于SSPALT模型和Newton-Raphson方法得到了指数Pareto分布参数和加速因子极大似然估计的数值,并运用Monte-Carlo模拟方法对不同估计方法的性能进行了评价.上述研究虽然都取得了很好的成果,但在逐步截尾样本下,用SSPALT研究逆Rayleigh分布估计问题的相关文献较少.例如:文献[10]的作者在I型双删失样本下,研究了逆Rayleigh分布参数的估计问题;文献[11]的作者在平方损失和LINEX损失函数下,推导出了逆Rayleigh分布参数的极大似然估计、贝叶斯估计和经验贝叶斯估计;文献[12]的作者在平方误差、熵和预防性损失函数下,提出了一种使用E-Bayes和分层Bayes估计方法对逆Rayleigh分布的尺度参数和逆风险率进行估计的方法.基于上述研究,本文将逐步II型截尾和SSPALT应用于逆Rayleigh分布的可靠性分析中,讨论了模型参数和加速因子的贝叶斯估计和经典估计,并通过数值模拟对各种估计方法的性能进行了评估.

1 模型描述和假设

标准逆Rayleigh分布的分布函数及其概率密度函数分别为:

$$Z(t)=\exp(-\frac{1}{t^2}),\ t>0\ ; \tag{1}$$

$$z(t)=\frac{2}{t^3}\exp(-\frac{1}{t^2}),\ t>0. \tag{2}$$

令 $T=\frac{X}{\theta}$,则由(1)式可知 X 服从参数为 θ 的逆Rayleigh分布,且 X 的分布函数和概率密度函数分别为 $F(x)=\exp(-\frac{\theta^2}{x^2})$ 和 $f(x)=\frac{2\theta^2}{x^3}\exp(-\frac{\theta^2}{x^2})$,其中 θ 为尺度参数,且 $\theta>0$,$x>0$.

本文假设如下:①有两个应力水平 S_0 和 S_1 $(S_0<S_1)$,其中 S_0 为正常应力水平,S_1 为加速应力水平.②在应力水平 S_0 和 S_1 下至少有一个系统失效.③加速条件下产品的使用寿命 Y 可以用损伤随机变量(TRV)模型折算,即 $Y=\begin{cases}X, & \text{if } X\leqslant\tau;\\ \tau+\beta^{-1}(X-\tau), & \text{if } X>\tau.\end{cases}$ 其中 X 是正常条件下测试产品的寿命,$\beta\ (\beta>1)$ 是加速因子.

基于以上假设,在步进应力部分加速寿命试验中 Y 的概率密度函数和分布函数可分别表示为:

$$f(y)=\begin{cases}0,\ \text{if}\quad y\leqslant 0\ ;\\ f_1(y)=\dfrac{2\theta^2}{y^3}\exp(-\dfrac{\theta^2}{y^2}),\ \text{if}\quad 0<y\leqslant\tau;\\ f_2(y)=\dfrac{2\theta^2\beta}{(\tau+\beta(y-\tau))^3}\exp(-\dfrac{\theta^2}{(\tau+\beta(y-\tau))^2}),\ \text{if}\quad y>\tau;\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}0,\ \text{if}\ y\leqslant 0;\\ F_1(y)=\exp(-\dfrac{\theta^2}{y^2}),\ \text{if}\ 0<y\leqslant\tau;\\ F_2(y)=\exp(-\dfrac{\theta^2}{(\tau+\beta(y-\tau))^2}),\ \text{if}\ y>\tau.\end{cases}.$$

逐步 II 型截尾步进应力部分加速寿命试验可描述如下：对随机选择的 n 个受试产品同时进行寿命试验，其中 n 、m 、τ 、R_i 和 R_m 是事先给定的常数，且 $m<n$ 、$R_m=n-m-\sum_{i=1}^{m-1}R_i$. 当在时刻 y_1 观察到第 1 个产品发生故障时，在剩下的 $n-1$ 个未失效产品中随机移除 R_1 个产品；当在时刻 y_2 观察到第 2 个产品发生故障时，从剩下的 $n-2-R_1$ 个未失效产品中随机移除 R_2 个产品；以此类推 . 若应力转换时间 τ 之前有 n_1 个系统失效，则在时刻 y_{n_1} 时将剩余未失效的 $n-n_1$ 个系统转移到加速应力下继续试验，直至观察到第 m 个产品发生故障时刻 y_m，并把剩余的 $R_m=n-m-\sum_{i=1}^{m-1}R_i$ 个产品全部移除试验 . 由以上即可以得到逐步 II 型截尾步进应力部分加速寿命试验下的观测样本为 $y_1<y_2<\cdots<y_{n_1}<\tau<y_{n_1+1}<\cdots<y_m$.

2 θ 和 β 的极大似然估计和区间估计

2.1 θ 和 β 的极大似然估计

根据逐步 II 型截尾步进应力部分加速寿命试验的观测样本（ $y_1<y_2<\cdots<y_{n_1}<\tau<y_{n_1+1}<\cdots<y_m$ ）可得观测样本的参数似然函数为：

$$\begin{aligned}L&=C\prod_{i=1}^{n_1}f_1(y_i)[1-F_1(y_i)]^{R_i}\prod_{i=n_1+1}^{m}f_2(y_i)[1-F_2(y_i)]^{R_i}=\\ &C\prod_{i=1}^{n_1}\frac{2\theta^2}{y_i^3}\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2})[1-\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2})]^{R_i}\prod_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta^2\beta}{\omega_i^3}\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})[1-\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})]^{R_i},\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $\omega_i=\tau+\beta(y_i-\tau)$.

为了求解 θ 和 β 的极大似然估计，对式 (3) 取对数可得：

$$\begin{aligned}l&=\ln C+m\ln 2\theta^2+(m-n_1)\ln\beta-\sum_{i=1}^{n_1}\ln y_i^3-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{\theta^2}{y_i^2}+\sum_{i=1}^{n_1}R_i\ln(1-\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2}))-\\ &\sum_{i=n_1+1}^{m}\ln\omega_i^3-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{\theta^2}{\omega_i^2}+\sum_{i=n_1+1}^{m}R_i\ln(1-\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})).\end{aligned}\tag{4}$$

再对式 (4) 求一阶偏导令其等于 0 可得：

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{m}{\theta}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2\theta}{y_i^2}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2R_i\theta}{y_i^2(\exp(\frac{\theta^2}{y_i^2})-1)}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta}{\omega_i^2}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta}{\omega_i^2(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^2})-1)}=0\ ,\tag{5}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\beta}=\frac{m-n_1}{\beta}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{3\omega_i'}{\omega_i}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^2})-1)}=0\,, \tag{6}$$

其中 $\omega_i'=y_i-\tau$. 由于利用式 (5) 和式 (6) 无法求出 θ 和 β 的显式表达式, 因此本文采用 Newton-Raphson 方法来求解二者的数值解 . 由此获得的数值解即为二者的极大似然估计 .

2.2 θ 和 β 的近似极大似然估计

由于式 (5) 和式 (6) 没有解析解, 因此本文运用近似方法来求解其参数近似解 . 令 $T=\frac{Y}{\theta}$, $K=\frac{\omega}{\theta}$, 则式 (5) 和式 (6) 可转换为:

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{m}{\theta}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2\theta}{y_i^2}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2R_i\theta}{y_i^2(\exp(\frac{1}{t_i^2})-1)}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta}{\omega_i^2}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta}{\omega_i^2(\exp(\frac{1}{k_i^2})-1)}=0\,; \tag{7}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\beta}=\frac{m-n_1}{\beta}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{3\omega_i'}{\omega_i}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3(\exp(\frac{1}{k_i^2})-1)}=0\,. \tag{8}$$

在点 $E(T_i)=p_i$ 和 $E(K_i)=b_i$ 处分别对 $\frac{1}{\exp(\frac{1}{t_i^2})-1}$ 和 $\frac{1}{\exp(\frac{1}{k_i^2})-1}$ 进行泰勒展开后, 再根据文献 [13] 可得 $Z(T_i)\overset{d}{=}U_i$, 其中 U_i 表示第 i 个来自均匀分布的逐步 II 型截尾次序统计量 . 对 $Z(T_i)\overset{d}{=}U_i$ 进行反解后可得 $T_i\overset{d}{=}Z^{-1}(U_i)$, 由此再对 T_i 求期望可得 $p_i=E(T_i)\approx Z^{-1}(\alpha_i)$, 其中 $\alpha_i=1-\prod_{j=m-i+1}^{n_1}\frac{j+R_{m-j+1}+R_{m-j+2}+\cdots+R_m}{j+1+R_{m-j+1}+R_{m-j+2}+\cdots+R_m}$ $i=1,2\cdots$, m . 因 T 服从标准逆 Rayleigh 分布, 所以有 $Z^{-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{-\ln t}}$. 记 $G(t_i)=\frac{1}{\exp(\frac{1}{t_i^2})-1}$, $G(t_i)$ 的导数 $g(t_i)=\frac{2\exp(\frac{1}{t_i^2})}{(\exp(\frac{1}{t_i^2})-1)^2t_i^3}$, 并用 $\frac{1}{\sqrt{-\ln\alpha_i}}$ 来近似 p_i, 则在点 p_i 对 $G(t_i)$ 进行泰勒展开并保留式的前两项后可得:

$$G(t_i)\approx G(p_i)+(t_i-p_i)g(p_i)=C_i+D_it_i\,, \tag{9}$$

其中 $C_i=\frac{\alpha_i(1-\alpha_i-2\ln\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^2}$, $D_i=\frac{2\alpha_i(-\ln\alpha_i)^{\frac{3}{2}}}{\alpha_i-1}$ $i=1,2$, $\cdots$, n_1 .

记 $H(k_i)=\frac{1}{\exp(\frac{1}{k_i^2})-1}$, $H(k_i)$ 的导数 $h(k_i)=\frac{2\exp(\frac{1}{k_i^2})}{(\exp(\frac{1}{k_i^2})-1)^2k_i^3}$, 则同理在点 b_i 对 $H(k_i)$ 进行泰勒展开后可得:

$$H(k_i)\approx H(b_i)+(k_i-b_i)h(b_i)=A_i+B_ik_i\,, \tag{10}$$

其中 $A_i=\frac{\alpha_i(1-\alpha_i-2\ln\alpha_i)}{(1-\alpha_i)^2}$, $B_i=\frac{2\alpha_i(-\ln\alpha_i)^{\frac{3}{2}}}{\alpha_i-1}$ $i=n_1+1$, n_1+2, $\cdots$, m .

将式 (9) 和式 (10) 分别代入式 (7) 和式 (8) 可得:

$$\frac{\partial l}{\partial \theta}=\frac{2m}{\theta}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2\theta}{y_i^{\ 2}}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2R_i\theta}{y_i^{\ 2}}(C_i+D_it_i)-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta}{\omega_i^{\ 2}}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta}{\omega_i^{\ 2}}(A_i+B_ik_i)=0\ ; \tag{11}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta}=\frac{m-n_1}{\beta}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{3\omega_i'}{\omega_i}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i\theta^2\omega_i'}{\omega_i^3}(A_i+B_ik_i)=0\ . \tag{12}$$

由于利用式 (11) 和式 (12) 无法求出 θ 和 β 的显式解，因此本文采用 Newton-Raphson 方法来求解二者的近似极大似然估计 .

2.3 θ 和 β 的近似置信区间

由于难以计算参数的期望方差—协方差矩阵，因此本文使用 MLE 的观测费希尔信息矩阵的逆来代替期望的方差—协方差矩阵 . 对式 (4) 求二阶偏导可得：

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}=\frac{-2m}{\theta^2}-\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2}{y_i^{\ 2}}+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{2R_i(\exp(\frac{\theta^2}{y_i^{\ 2}})(1-\frac{2\theta^2}{y_i^{\ 2}})-1)}{y_i^{\ 2}(\exp(\frac{\theta^2}{y_i^{\ 2}})-1)^2}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2}{\omega_i^{\ 2}}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})(1-\frac{2\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})-1)}{\omega_i^{\ 2}(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})-1)^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2}=\frac{n_1-m}{\beta^2}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{3(\omega_i')^2}{\omega_i^{\ 2}}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{6\theta^2(\omega_i')^2}{\omega_i^{\ 4}}-\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{2R_i(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})(\frac{2\theta^4(\omega_i')^2}{\omega_i^{\ 6}}-\frac{3\theta^2(\omega_i')^2}{\omega_i^{\ 4}})+\frac{3\theta^2(\omega_i')^2}{\omega_i^{\ 4}})}{(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})-1)^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta\partial \beta}=\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{4\theta\omega_i'}{\omega_i^3}+\sum_{i=n_1+1}^{m}\frac{4R_i\omega_i'\theta(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}}-1)+1)}{\omega_i^3(\exp(\frac{\theta^2}{\omega_i^{\ 2}})-1)^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta\partial \theta}=\frac{\partial^2 l}{\partial \theta\partial \beta}\ .$$

由参数的二阶导可知 θ 和 β 的观测费希尔信息矩阵为：

$$\boldsymbol{I}(\hat\theta_M,\ \hat\beta_M)=\begin{bmatrix}-\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial\theta\partial\beta}\\ -\frac{\partial^2 l}{\partial\beta\partial\theta} & -\frac{\partial^2 l}{\partial\beta^2}\end{bmatrix}^{-1}_{\theta=\hat\theta_M,\ \beta=\hat\beta_M}=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\hat\theta_M) & \mathrm{Cov}(\hat\theta_M,\hat\beta_M)\\ \mathrm{Cov}(\hat\beta_M,\hat\theta_M) & \mathrm{Var}(\hat\beta_M)\end{bmatrix}.$$

由上式再利用极大似然估计的渐近正态性性质可得 $(\hat\theta_M,\ \hat\beta_M)\sim N((\hat\theta,\ \hat\beta),\ I(\hat\theta_M,\ \hat\beta_M))$，因此 θ 和 β 的近似置信区间分别为 $(\hat\theta_M-Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\theta_M)},\ \hat\theta_M+Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\theta_M)})$ 和 $(\hat\beta_M-Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_M)},$ $\hat\beta_M+Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\hat\beta_M)})$.

其中 $Z_{\alpha/2}$ 是标准正态分布的上 $\alpha/2$ 分位点 .

在实际应用中，由于可能会出现置信区间的下限为负数的情况，因此本文通过对数变换和 Delta 方法来获得 $\ln\hat\theta_M$ 和 $\ln\hat\beta_M$ 的渐近正态分布 . 按上述方法获得的 $\ln\hat\theta_M$ 和 $\ln\hat\beta_M$ 的渐近正态分布为：

$$\frac{\ln\hat\theta_M-\ln\theta}{\mathrm{Var}(\ln\hat\theta_M)}\sim N(0,1)\ ,\ \frac{\ln\hat\beta_M-\ln\beta}{\mathrm{Var}(\ln\hat\beta_M)}\sim N(0,1)\ .$$

由 $\ln\hat\theta_M$ 和 $\ln\hat\beta_M$ 的渐近正态分布可得，θ 和 β 的 $100(1-\alpha)\%$ 对数正态渐近置信区间为：

$$(\hat\theta_M*\exp(-Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\ln\hat\theta_M)})\ ,\ \hat\theta_M*\exp(Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\ln\hat\theta_M)}))\ ;$$

$(\hat{\beta}_M * \exp(-Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\ln\hat{\beta}_M)}), \ \hat{\beta}_M * \exp(Z_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(\ln\hat{\beta}_M)}))$.

其中 $\mathrm{Var}(\ln\hat{\theta}_M) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_M)/\hat{\theta}_M$, $\mathrm{Var}(\ln\hat{\beta}_M) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_M)/\hat{\beta}_M$.

3 θ和β的贝叶斯估计和区间估计

3.1 θ和β的贝叶斯估计

本文利用平方 (SE) 损失函数和线性指数 (LINEX) 损失函数研究θ和β的贝叶斯估计 . 首先假定θ的先验信息服从伽马分布, β服从无信息先验分布, 即 $\pi(\theta) \propto \theta^{b-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}$ $(\theta > 0, \ b, \ \lambda > 0)$, $\pi(\beta) \propto \dfrac{1}{\beta}$ $(\beta > 0)$, 则由此可得θ和β的联合先验分布函数为:

$$\pi(\theta, \ \beta) \propto \theta^{b-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\beta^{-1} . \tag{13}$$

利用式 (3) 和式 (13) 可得θ和β的联合后验密度函数为:

$$\pi^*(\theta, \ \beta|y) \propto \theta^{2m+b-1}\beta^{m-n_1-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\prod_{i=1}^{n_1}\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2})[1-\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2})]^{R_i}\prod_{i=n_1+1}^{m}\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})[1-\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})]^{R_i} . \tag{14}$$

由式 (14) 可知, 在平方损失函数和线性指数损失函数下, θ和β的函数 $\varphi(\theta, \ \beta)$ 的贝叶斯估计分别为:

$$\hat{\varphi}_{\mathrm{SE}}(\theta, \ \beta) = E[\varphi(\theta, \ \beta) \mid y] = \int_{(\theta, \ \beta)}\varphi(\theta, \ \beta)\pi^*(\theta, \ \beta|y)\mathrm{d}_{(\theta, \ \beta)} ; \tag{15}$$

$$\hat{\varphi}_{\mathrm{LINEX}}(\theta, \ \beta) = -\frac{1}{c}\ln[E(\exp(-c\varphi(\theta, \ \beta) \mid y) = -\frac{1}{c}\int_{(\theta, \ \beta)}\exp(-c\varphi(\theta, \ \beta) \mid y)\pi^*(\theta, \ \beta \mid y)\mathrm{d}_{(\theta, \ \beta)} . \tag{16}$$

由于式 (15) 和式 (16) 较为复杂, 难以计算, 因此本文利用 MCMC 算法来获得θ和β的贝叶斯估计 . 由式 (14) 可得, θ和β的满条件后验分布分别为:

$$\pi_1^*(\theta \mid \beta, y) \propto \theta^{2m+b-1}\exp(-\lambda\theta+\sum_{i=1}^{n_1}(-\frac{\theta^2}{y_i^2})+\sum_{i=n_1}^{m}(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2}))\prod_{i=1}^{n_1}(1-\exp(-\frac{\theta^2}{y_i^2}))^{R_i}\prod_{i=n_1+1}^{m}(1-\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2}))^{R_i} ; \tag{17}$$

$$\pi_2^*(\beta \mid \theta, y) \propto \beta^{m-n_1-1}\prod_{i=n_1+1}^{m}\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})((1-\exp(-\frac{\theta^2}{\omega_i^2}))^{R_i} . \tag{18}$$

因式 (17) 和式 (18) 不能简化为已知的分布, 因此本文使用 Metropolis-Hastings 算法 [14] 在正态建议分布中通过生成随机样本来求解θ和β的贝叶斯估计 . 具体求解θ和β的贝叶斯估计的过程为:

1) 选定θ和β的初始值, 分别为 $\theta^{(0)}$ 和 $\beta^{(0)}$.

2) 设 $k=1$, 并使用 MH 算法在 $\pi_1^*(\theta \mid \beta, \ y)$ 和 $\pi_2^*(\beta \mid \theta, \ y)$ 中抽取 $\theta^{(k)}$ 和 $\theta^{(k)}$ 的随机样本 . 具体过程为:

①根据 2) 中生成的随机样本计算θ和β的可接受概率, 其计算公式分别为:

$$p_\theta = \min(\frac{\pi_1^*(\theta^* \mid \theta^{(k-1)}, \ \beta^{(k-1)}, \ y)}{\pi_1^*(\theta^{(k-1)} \mid \theta^{(k-1)}, \ \beta^{(k-1)}, \ y)}, 1) ,$$

$$p_\beta = \min(\frac{\pi_2^*(\beta^* \mid \beta^{(k-1)}, \ \theta^{(k-1)}, \ y)}{\pi_2^*(\beta^{(k-1)} \mid \beta^{(k-1)}, \ \theta^{(k-1)}, \ y)}, 1) .$$

②从均匀分布 $U \sim U(0,1)$ 中生成 U_1 和 U_2 .

①如果 $U_1 \leqslant p_\theta$, 则接受正态建议分布产生的样本 $\theta^{(k)}$, 并设 $\theta^{(k)} = \theta^{(*)}$; 否则, 设 $\theta^{(k)} = \theta^{(k-1)}$.

②如果 $U_1 \leqslant p_\beta$, 则接受正态建议分布产生的样本 $\beta^{(k)}$, 并设 $\beta^{(k)} = \beta^{(*)}$; 否则, 设 $\beta^{(k)} = \beta^{(k-1)}$.

3) 计算 $\theta^{(k)}$ 和 $\beta^{(k)}$.

4) 设 $k = k+1$, 并重复 N 次步骤① — ② .

5) 利用平方损失函数和线性指数损失函数求解 θ 和 β 的贝叶斯估计，经求解得：$\hat{\theta}_{BE}=\frac{1}{N-N_0}\sum_{k=N_0+1}^{N}\theta^{(k)}$，$\hat{\theta}_{BL}=-\frac{1}{c}\ln[\frac{1}{N-N_0}\sum_{k=N_0+1}^{N}\mathrm{e}^{-c\theta_k}]$，$\hat{\beta}_{BE}=\frac{1}{N-N_0}\sum_{k=N_0+1}^{N}\beta^{(k)}$，$\hat{\beta}_{BL}=-\frac{1}{c}\ln[\frac{1}{N-N_0}\sum_{k=N_0+1}^{N}\mathrm{e}^{-c\beta_k}]$.

3.2 θ 和 β 的最大后验密度 (HPD) 置信区间

本文利用贝叶斯估计生成的数据构造 HPD 置信区间，具体过程如下：

1) 升序排列 $\theta^{(k)}$ 和 $\beta^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,N)$.

2) 计算 $\theta^{(k)}$ 和 $\beta^{(k)}$ 在置信水平为 $100(1-\alpha)\%$ 的置信区间，得：

$(\theta^{(k)},\ \theta^{(k+(1-\alpha)N)})$，$(\beta^{(k)},\ \beta^{(k+(1-\alpha)N)})$ $(k=1,2,\cdots,N-(1-\alpha)N)$.

3) 选择区间 $(\theta^{(k)},\ \theta^{(k+(1-\alpha)N)})$ 和 $(\beta^{(k)},\ \beta^{(k+(1-\alpha)N)})$ $(k=1,2,\cdots,N-(1-\alpha)N)$ 中的最短区间作为 θ 和 β 的 HPD 置信区间 .

4 数值模拟

为了研究 3 种移除方案在不同样本量 n、截尾个数 m 下的估计效果，本文运用 Monte-Carlo 方法对上述估计方法进行模拟 (模拟次数为 1000 次)，并利用均方误差 (MSE)、平均相对误差 (ARE)、渐近置信区间和 HPD 置信区间等考核 3 种方案对 θ 和 β 的估计效果 . θ 和 β 的 MSE 和 ARE 的计算公式为 $\gamma_{\mathrm{MSE}}=\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}(\gamma-\gamma^{(i)})^2$，$\gamma_{\mathrm{ARE}}=\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}|\gamma-\gamma^{(i)}|/\gamma$ ($\gamma=\theta,\ \beta$). 数值模拟的具体实现步骤如下：

1) 给定 n、m、τ、θ、β 和 c 的值 .

2) 根据 n 和 m ($1\leqslant m\leqslant n$) 的值，在均匀分布 $U(0,1)$ 中生成大小为 m 的独立随机样本 $(U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_m)$.

3) 给定移走数目 $(R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_m)$，且 $\sum_{i=1}^{m}R_i=n-m$.

4) 令 $E_i=U_i^{1/(i+\sum_{j=1}^{m-i+1}R_j)}$，$U_i^*=1-(E_mE_{m-1}\cdots E_{m-i+1})$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，由此生成数据 $(U_1^*,\ U_2^*,\ \cdots,\ U_m^*)$.

5) 令 n_1 是正常条件下的失效个数，使得 $U_{n_1}^*<\exp(-\frac{\theta^2}{\tau^2})<U_{n_1+1}^*$. 当 $1\leqslant i\leqslant n_1$ 时，令 $y_i=\frac{\theta}{(-\ln U_i^*)^{1/2}}$；当 $n_1+1\leqslant i\leqslant m$ 时，令 $y_i=\tau+\beta^{-1}(\frac{\theta}{(-\ln U_i^*)^{1/2}}-\tau)$.

6) 利用步骤 5) 生成随机样本 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n_1},\ y_{n_1+1},\ \cdots,\ y_m$，由此计算 θ 和 β 的 MLE、AMLE 和渐近置信区间 .

7) 利用 Metropolis-Hastings 算法生成 2000 个随机数据 (即 $N=2000$，其中前 1000 个样本为老化期个数 N_0)，再利用平方损失函数和线性指数损失函数计算 θ 和 β 的贝叶斯估计 .

8) 设 θ 和 β 的置信水平为 95%，按此计算 θ 和 β 的近似置信区间和 HPD 置信区间 .

根据上述步骤，设 $\theta=1$，$\beta=1.5$，$\tau=1$，$b=1$，$\lambda=1$，$c=-1$，$c=0.001$，$c=1$，并给定如下 3 种截尾方案：

I：$R_i=\begin{cases}n-m,\ i=1;\\0,\ 其他.\end{cases}$　II：$R_i=\begin{cases}n-m,\ i=\frac{m}{2};\\0,\ 其他.\end{cases}$　III：$R_i=\begin{cases}n-m,\ i=m;\\0,\ 其他.\end{cases}$

按上述数值模拟步骤进行模拟的结果见表 1 和表 2.

由表 1 可以看出，Bayes 估计的 MSE、ARE 值小于 MLE 估计和 AMLE 估计的 MSE、ARE 值，表明 Bayes 估计的效果优于 MLE 估计和 AMLE 估计的效果 . 另外，随着样本量的增加，3 种估计方法的 MSE 和 ARE 值均呈现减少趋势，这表明这 3 种估计方法在大样本下的估计效果优于在小样本下的估计效果 .

由表 1 还可以看出，在线性指数损失函数下，Bayes 估计的效果优于平方损失函数下的 Bayes 估计的效果 . 另外，从总体来看，β 在线性指数损失函数 ($c=1$) 下的贝叶斯估计比在 MLE、AMLE、平方损失函数和线性指数损失函数 ($c=-1$) 下的贝叶斯估计具有更小的 MSE 值和 ARE 值 . 这说明 β 在线性指数损失函数 ($c=1$) 下的贝叶斯估计优于其他估计 .

从表 2 可以看出，在同一组样本量和同一种移除方案中，Bayes 估计的区间长度均小于 MLE 估计的区间长度，即 Bayes 估计的 HPD 置信区间长度整体优于 MLE 的渐近置信区间长度 . 另外，当样本量增加时，两种置信区间的覆盖率整体上逐渐接近于 95% 理论值，HPD 置信区间和渐进置信区间的长度均呈减少趋势，这说明参数的区间估计在大样本下的置信区间要优于小样本下的置信区间 .

表 1 不同参数和加速因子下 3 种估计方法的均方误差 **(MSE)** 和平均相对误差 **(ARE)**

(n, m)	移除方案	参数	MSE(ARE)					
			MLE	AMLE	Bayes(SE)	Bayes(LINEX)		
						$c=-1$	$c=0.001$	$c=1$
(25，14)	I	θ	0.0196 (0.1344)	0.0197 (0.1395)	0.0184 (0.1292)	0.0165 (0.1284)	0.0167 (0.1292)	0.0169 (0.1301)
		β	0.0323 (0.1162)	0.0318 (0.1144)	0.0238 (0.0924)	0.0154 (0.0828)	0.0164 (0.0852)	0.0173 (0.0877)
	II	θ	0.0363 (0.1782)	0.0267 (0.1265)	0.0146 (0.1063)	0.0106 (0.1028)	0.0101 (0.1005)	0.0097 (0.0983)
		β	0.0287 (0.1067)	0.0223 (0.0862)	0.0156 (0.0720)	0.0112 (0.0706)	0.0116 (0.0710)	0.0121 (0.0719)
	III	θ	0.0299 (0.1621)	0.0216 (0.1513)	0.0111 (0.0905)	0.0075 (0.0864)	0.0078 (0.0881)	0.0081 (0.0898)
		β	0.0246 (0.1328)	0.0236 (0.1023)	0.0092 (0.0555)	0.0055 (0.0494)	0.0052 (0.0481)	0.0049 (0.0468)
(30，20)	I	θ	0.0183 (0.1311)	0.0187 (0.1325)	0.0113 (0.0924)	0.0071 (0.0840)	0.0074 (0.0860)	0.0077 (0.0879)
		β	0.0272 (0.1072)	0.0299 (0.1120)	0.0207 (0.0884)	0.0134 (0.0773)	0.0125 (0.0746)	0.0116 (0.0718)
	II	θ	0.0297 (0.1521)	0.0223 (0.1185)	0.0136 (0.1026)	0.0089 (0.0944)	0.0094 (0.0968)	0.0098 (0.0992)
		β	0.0243 (0.0902)	0.0212 (0.0826)	0.0103 (0.0558)	0.0071 (0.0562)	0.0068 (0.0550)	0.0065 (0.0539)
	III	θ	0.0256 (0.1446)	0.0194 (0.1405)	0.0077 (0.0798)	0.0065 (0.0805)	0.0064 (0.0798)	0.0063 (0.0791)
		β	0.0211 (0.1126)	0.0207 (0.0957)	0.0072 (0.0459)	0.0036 (0.0402)	0.0038 (0.0413)	0.0041 (0.0425)

续表 1

(n，m)	移除方案	参数	MSE(ARE)					
			MLE	AMLE	Bayes(SE)	Bayes(LINEX)		
						$c=-1$	$c=0.001$	$c=1$
(80，32)	I	θ	0.0134 (0.1090)	0.0138 0.1118	0.0076 (0.0672)	0.0041 (0.0638)	0.0043 (0.0655)	0.0045 (0.0671)
		β	0.0204 (0.0820)	0.0192 (0.0786)	0.0090 (0.0555)	0.0035 (0.0396)	0.0038 (0.0413)	0.0042 (0.0430)
	II	θ	0.0211 (0.1302)	0.0155 (0.1053)	0.0070 (0.0707)	0.0047 (0.0689)	0.0049 (0.0699)	0.0050 (0.0710)
		β	0.0187 (0.0767)	0.0157 (0.0635)	0.0061 (0.0422)	0.0031 (0.0370)	0.0030 (0.0365)	0.0029 (0.0360)
	III	θ	0.0114 (0.1064)	0.0133 (0.1059)	0.0066 (0.0645)	0.0027 (0.0518)	0.0025 (0.0497)	0.0023 (0.0476)
		β	0.0152 (0.0983)	0.0138 (0.0782)	0.0069 (0.0474)	0.0012 (0.0229)	0.0009 (0.0210)	0.0008 (0.0109)
(120，56)	I	θ	0.0110 (0.1048)	0.0110 (0.1047)	0.0024 (0.0384)	0.000 68 (0.0260)	0.000 63 (0.0250)	0.000 59 (0.0243)
		β	0.0136 (0.0695)	0.0133 (0.0683)	0.0032 (0.0320)	0.000 72 (0.0039)	0.000 19 (0.0019)	0.000 35 (0.0029)
	II	θ	0.0139 (0.1194)	0.0121 (0.0992)	0.0042 (0.0548)	0.0020 (0.0452)	0.0019 (0.0440)	0.0018 (0.0429)
		β	(0.0125) 0.0612	0.0137 (0.0681)	0.0046 (0.0380)	0.0020 (0.0299)	0.0018 (0.0285)	0.0016 (0.0271)
	III	θ	0.0110 (0.1048)	0.0113 (0.1051)	0.0042 (0.0528)	0.0020 (0.0450)	0.0019 (0.0438)	0.0018 (0.0427)
		β	0.0111 (0.0763)	0.0107 (0.0689)	0.0017 (0.0221)	0.000 65 (0.0171)	0.000 63 (0.0171)	0.000 60 (0.0164)

表 2 不同样本在不同移除方案下其参数 θ 和 β 的置信区间长度和覆盖率（$\theta=1$，$\beta=1.5$）

(n，m)	移除方案	参数	MLE		Bayes	
			区间长度	覆盖率	区间长度	覆盖率
(25，14)	I	θ	0.5521	0.876	0.3034	0.898
		β	1.7314	0.910	0.3573	0.952
	II	θ	1.5057	0.897	0.2624	0.926
		β	1.5699	0.852	0.2218	0.896
	III	θ	0.4758	0.901	0.2238	0.913
		β	1.9873	0.913	0.2501	0.897
(30，20)	I	θ	0.5140	0.906	0.2128	0.935
		β	1.4072	0.917	0.3172	0.955
	II	θ	0.3864	0.879	0.2569	0.924
		β	1.4703	0.953	0.2111	1.000
	III	θ	0.3591	0.922	0.2088	0.934
		β	1.8675	0.937	0.2392	0.963
(80，32)	I	θ	0.3957	0.911	0.1879	0.923
		β	1.3025	0.959	0.2361	1.000
	II	θ	0.3379	0.936	0.1781	0.963
		β	1.3014	0.902	0.1972	0.915
	III	θ	0.3169	0.963	0.1834	1.000
		β	1.5632	0.905	0.2263	0.918

续表 2

(n, m)	移除方案	参数	MLE		Bayes	
			区间长度	覆盖率	区间长度	覆盖率
(120, 56)	I	θ	0.3054	0.924	0.1619	0.988
		β	1.1676	0.945	0.2099	1.000
	II	θ	0.2907	0.965	0.1649	0.995
		β	1.2395	0.973	0.1475	1.000
	III	θ	0.2505	0.961	0.1358	0.982
		β	1.4072	0.952	0.1348	0.970

5 结论

本文对逐步II型截尾样本SSAPLT下的逆Rayleigh分布进行统计分析表明：贝叶斯估计的效果优于极大似然估计和近似极大似然估计的效果；线性指数损失函数下的贝叶斯估计效果优于平方损失函数下的贝叶斯估计效果；随着样本量的增加，极大似然估计、近似极大似然估计和贝叶斯估计的MSE和ARE都呈减小趋势；在95%的置信水平下，贝叶斯估计的HPD置信区间长度整体优于极大似然估计的渐近置信区间长度．上述研究结果可为可靠性研究提供良好参考．由于产品失效的原因不仅仅是由单一因素引起的，因此在今后的研究中我们将考虑把竞争失效模型、SSAPLT和逐步II型截尾样本应用在逆Rayleigh分布中．

参考文献：

[1] 鄢伟安，杨海军，周俊杰．基于自适应逐步Ⅱ型混合截尾试验Burr-Ⅻ分布的统计分析[J]. 系统工程理论与实践，2020，40(5)：1339-1349.

[2] PATHAK A，KUMAR M，SINGH S K，et al. Bayesian inference for Maxwell Boltzmann distribution on step-stress partially accelerated life test under progressive type-II censoring with binomial removals[J]. International Journal of System Assurance Engineering and Management，2022，13(4)：1976-2010.

[3] PANDEY A，KAUSHIK A，SINGH S K，et al. Statistical analysis for generalized progressive hybrid censored data from lindley distribution under step-Stress partially accelerated life test model[J]. Austrian Journal of Statistics，2021，50(1)：105-120.

[4] FAWZY A M. Inferences under step-stress partially accelerated life tests for linear exponential distribution based on progressive type-II censored data[J].Journal of the Indian Society for Probability and Statistics，2019，20(1)：65-79.

[5] ELSAGHEER R M，MAHMOUND M A W，NAGATY H. Inferences for weibull-exponential distribution based on progressive type-II censoring under step-stress partially accelerated life test model[J]. Journal of Statistical Theory and Practice，2019，13(1)：1-19.

[6] MM Y，REHAB A，G S N. Parametric inference on partially accelerated life testing for the inverted Kumaraswamy distribution based on type-II progressive censoring data[J].Mathematical Biosciences and Engineering：MBE，2023，20(2)：1674-1694.

[7] MUSTAFA K，ALI S S，AHMADUR R，et al. Parameter estimation in step stress partially accelerated life testing under different types of censored data[J].Computational Intelligence and Neuroscience，2022，2022：3491732.

[8] ALAM I，AHMADH H，AHMED A，et al. Inference on adaptive progressively hybrid censoring schemes under partially

（下转第30页）

[13] GIDAS B，SPRUCK J. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations[J]. Communications in Partial Differential Equations，1981，6(8)：883-901.

[14] PHAN Q H，SOUPLET P. Liouville-type theorems and bounds of solutions of Hardy-Henon equations[J]. Journal of Differential Equations，2012，252(3)：2544-2562.

[15] EVANS L C. Partial Differential Equations[M]. Providence，Rhode Island： American Mathematical Society，2010：618.

[16] AZORERO J G，ALONSO I P. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]. Journal of Differential Equations，1998，144(2)：441-476.

[17] SERRIN J，ZOU H H. Cauchy-Liouville and universal boundedness theorems for quasilinear elliptic equations and inequalities[J]. Acta Mathematica，2002，189(1)：79-142.

[18] ZOU H H. A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations，2008，33(4)：417-437.

[19] BIRINDELLI I，DEMENGEL F. Some Liouville theorems for the *p*-Laplacian[C]// Jerome Busca. 2001-Luminy Conference on Quasilinear Elliptic and Parabolic Equations and Systems. Luminy France： Electronic Journal of Differential Equations，2002：35-46.

[20] POLACIK P，QUITTNER P，SOUPLET P. Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems，I：Elliptic equations and systems[J]. Duke Mathematical Journal，2007，139(3)：555-579.

[21] XIAO Y B，KIM J K，HUANG N J. A generalization of Ascoli-Arzela theorem with an application[J]. Nonlinear Functional Analysis & Applications，2006，11(2)：305-317.

[22] SAKAGUCHI S. Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems[J]. Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa，Classe di Scienze，1987，14(3)：403-421.

（上接第 22 页）

accelerated life test for OLiHL distribution[J].Quality and Reliability Engineering International，2022，39(8)：3410-3427.

[9] AHMED A I. Parametric and interval estimation under step-stress partially accelerated life tests using adaptive type-II progressive hybrid censoring[J]. Annals of Data Science，2020，10(2)：1-13.

[10] 龙兵，张忠占．Ⅰ型双删失下逆 Rayleigh 分布的统计分析 [J]. 数学的实践与认识，2019，49(06)：199-207.

[11] 李兰平．平方误差和 LINEX 损失函数下逆 Rayleigh 分布参数的经验 Bayes 估计 [J]. 统计与决策，2013(1)：81-83.

[12] ATHIRAKRISHNAN R B，ABDULSATHAR E I. E-Bayesian and hierarchical bayesian estimation of inverse rayleigh distribution[J].American Journal of Mathematical and Management Sciences，2022，41(1)：70-87.

[13] BALAKRISHNAN N，SANDHU A R. A simple simulational algorithm for generating progressive type-II censored samples[J].The American Statistician，2012，49(2)：229-230.

[14] RAQAB M Z，MADI M T. Bayesian inference for the generalized exponential distribution[J]. Journal of Statistical computation and Simulation，2005，75(10)：841-852.