文章编号：1004-4353(2019)02-0103-06

三值自相关三元序列偶的新构造

黄丹芸[1,2,3]

(1. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院；2. 福建省大数据管理新技术与知识工程重点实验室；
3. 智能计算与信息处理福建省高等学校重点实验室：福建 泉州 362000)

摘要：利用 2 阶 Whiteman 广义分圆类构造出 4 类 $N=pq$ 的三值自相关三元序列偶，其中 $p=2f+1$，$q=2f'+1$ 为不同的奇素数，$(f,f')=1$. 所构造的 4 类三值自相关三元序列偶，其相关函数的旁瓣值都很小，且与 p、q 都无关. 该结果扩大了原有三值自相关三元序列偶的数量，可为三值自相关三元序列偶的构造提供新的途径.

关键词：三值自相关三元序列偶；2 阶 Whiteman 广义分圆类；分圆数

中图分类号：O157　　　　**文献标识码**：A

New constructions of ternary sequence pairs with three-level autocorrelation

HUANG Danyun[1,2,3]

(1. *School of Mathematics and Computer Science*, *Quanzhou Normal University*; 2. *Fujian Provincial Key Laboratory of Data Intensive Computing*; 3. *Key Laboratory of Intelligent Computing and Information Processing*, *Fujian Province University*: *Quanzhou* 362000, *China*)

Abstract: Four new families of ternary sequence pairs with three-level autocorrelation with period $N=pq$ are constructed by using Whiteman generalized cyclotomic classes of order two, where $p=2f+1$ and $q=2f'+1$ are distinct odd primes, $(f,f')=1$. Furthermore, the out-of-phase correlations of the four ternary sequence pairs constructed are all small and are independent to p and q. The results in this paper show that the presentation of these new ternary sequence pairs can expand the number of original ternary sequence pairs with three-level autocorrelation, and provide a new approach to construct ternary sequence pairs with three-level autocorrelation.

Keywords: ternary sequence pairs with three-level autocorrelation; Whiteman generalized cyclotomic classes of order two; cyclotomic number

0　引言

具有良好相关特性的三元序列偶被广泛地应用于通信、雷达等系统中. 在对三元序列偶的相关研究中，学者们根据序列偶相关函数值的不同，提出了最佳三元序列偶[1-2]、伪随机三元序列偶[3]、准最佳三进阵列偶[4]、三值自相关三元序列偶[5-7]等. 针对三值自相关三元序列偶的研究和构造，彭秀平等[6]利用二阶、四阶和六阶分圆数方法构造了一种特殊的三值自相关三元序列偶——三值自相关几乎二元序列偶；贾彦国等[7]利用四阶分圆类构造了三值自相关三元序列偶，所得到的三元序列偶都具有良好的相关特性. 基于上述研究，本文利用 2 阶 Whiteman 广义分圆类构造 $N=pq$ 的三值自相关三元序列偶，并得

收稿日期：2019－04－21　　　**基金项目**：福建省中青年教师教育科研项目(JAT160404)

作者简介：黄丹芸(1983—)，女，讲师，研究方向为序列设计、组合设计.

到 4 类具有良好相关特性的三值自相关三元序列偶.

1 预备知识

定义 1[7] 令$\{x(t)\}$和$\{y(t)\}$是两个周期为N的三元$(-1,1,0)$序列,定义序列偶(x,y)的循环相关函数为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)y(i+\tau)=\begin{cases}F,\ 当\ \tau=0\ 且\ F\neq E_1\neq E_2\ 时;\\ E_1,\ 当\ \tau\in H\ 时;\\ E_2,\ 当\ \tau\in Z_N^*-H\ 时.\end{cases}$$

其中,H为$Z_N^*=Z_N-\{0\}$的一个子集,F为相关函数的峰值,E_1、E_2为相关函数的旁瓣值,则称序列偶(x,y)为三值自相关三元序列偶.

下面给出 Whiteman 广义分圆类的相关概念及一些性质.

引理 1[8]108 设$N=pq$,其中p和q为不同的奇素数,令g是$GF(p)$和$GF(q)$的一个公共原根,e为$p-1$和$q-1$的最大公因数,记$(p-1)(q-1)=de$.令x为满足下列同余方程组的整数解:

$$\begin{cases}x\equiv g(\bmod p),\\ x\equiv 1(\bmod q),\end{cases}$$

则Z_N中所有可逆元的集合可表示为$Z_N^*=\{g^ix^j:i=0,1,\cdots,d-1;j=0,1,\cdots,e-1\}$.定义 Whiteman 广义分圆类为$C_j=\{g^ix^j:i=0,1,\cdots,d-1\}$, $0\leqslant j\leqslant e-1$.令$(l,m)$为同余方程

$$g^sx^l+1=g^tx^m(\bmod N)$$

的解$s,t(0\leqslant s,t\leqslant d-1)$的个数,即$(l,m)=|(C_l+1)\cap C_m|$,则称$(l,m)$为$e$阶分圆数.

定义$Q=\{q,2q,\cdots,(p-1)q\}$, $P=\{p,2p,\cdots,(q-1)p\}$, $R=\{0\}$.记$p-1=ef$,$q-1=ef'$,则$(f,f')=1$.

引理 2[8]112,[9]1700 $$|(C_0+\tau)\cap C_1|=\begin{cases}(0,1),\ \tau\in C_0;\\ (1,0),\ \tau\in C_1;\\ \dfrac{(p-1)(q-1)}{4},\ \tau\in P\cup Q.\end{cases}$$

引理 3[8]113 $$|C_0\cap((Q\cup R)+\tau)|=\begin{cases}0,\ \tau\in Q\cup R;\\ (p-1)/2,\ \tau\in P\cup C_0\cup C_1.\end{cases}$$

引理 4[9]1700 $$|C_1\cap((Q\cup R)+\tau)|=\begin{cases}0,\ \tau\in Q\cup R;\\ (p-1)/2,\ \tau\in P\cup C_0\cup C_1.\end{cases}$$

引理 5[9]1700 当$|p-q|/2$是奇数时,$-1\in C_1$;当$|p-q|/2$是偶数时,$-1\in C_0$.

引理 6[9]1700 $$|P\cap(C_0+\tau)|=\begin{cases}0,\ \tau\in P;\\ (q-1)/2,\ \tau\in Q;\\ (q-1)/2,\ \tau\in C_1\ 且\ |p-q|/2\ 为偶数;\\ (q-3)/2,\ \tau\in C_1\ 且\ |p-q|/2\ 为奇数;\\ (q-3)/2,\ \tau\in C_0\ 且\ |p-q|/2\ 为偶数;\\ (q-1)/2,\ \tau\in C_0\ 且\ |p-q|/2\ 为奇数.\end{cases}$$

引理 7[9]1701 $$|P\cap((Q\cup R)+\tau)|=\begin{cases}1,\ \tau\in P;\\ 0,\ \tau\in Q;\\ 1,\ \tau\in C_0\cup C_1.\end{cases}$$

由引理 6 和引理 7 容易证得引理 8.

引理 8　$|P\cap(C_1+\tau)|=\begin{cases}0,\ \tau\in P;\\(q-1)/2,\ \tau\in Q;\\(q-3)/2,\ \tau\in C_1 \text{ 且 } |p-q|/2 \text{ 为偶数};\\(q-1)/2,\ \tau\in C_1 \text{ 且 } |p-q|/2 \text{ 为奇数};\\(q-1)/2,\ \tau\in C_0 \text{ 且 } |p-q|/2 \text{ 为偶数};\\(q-3)/2,\ \tau\in C_0 \text{ 且 } |p-q|/2 \text{ 为奇数}.\end{cases}$

引理 9[8]113　设 τ 是一个能被 p 整除但不是能被 q 整除的整数，则

$$|(C_0+\tau)\cap C_0|=\frac{(p-1)(q-3)}{4}.$$

交换引理 9 中的 p 和 q，即设 τ 是一个能被 q 整除但不是能被 p 整除的整数，则 $|(C_0+\tau)\cap C_0|=\dfrac{(p-3)(q-1)}{4}$.

引理 10[8]115　当 $e=2$ 时，若 $ff'=\dfrac{(p-1)(q-1)}{4}$ 是偶数，则 $(0,0)=(1,0)=(1,1)=\dfrac{(p-2)(q-2)+1}{4}$，$(0,1)=\dfrac{(p-2)(q-2)-3}{4}$；若 ff' 是奇数，则 $(0,1)=(1,0)=(1,1)=\dfrac{(p-2)(q-2)-1}{4}$，$(0,0)=\dfrac{(p-2)(q-2)+3}{4}$.

2　主要结果及其证明

定理 1　设 $N=pq$，其中 $p=2f+1$，$q=2f'+1$ 为不同的奇素数，$\gcd(p-1,q-1)=2$. 令

$$x(t)=\begin{cases}-1,\ \text{当 } t\in C_0 \text{ 时};\\1,\ \text{当 } t\in C_1 \text{ 时};\\1,\ \text{当 } t\in Q \text{ 时};\\-1,\ \text{当 } t\in P \text{ 时};\\-1,\ \text{当 } t\in R \text{ 时};\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}-1,\ \text{当 } t\in C_0 \text{ 时};\\0,\ \text{当 } t\in C_1 \text{ 时};\\0,\ \text{当 } t\in Q \text{ 时};\\-1,\ \text{当 } t\in P \text{ 时};\\1,\ \text{当 } t\in R \text{ 时}.\end{cases}$$

1）当 ff' 为偶数，$q=p-2$ 时，序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶，其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2,\ \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\1,\ \text{当 } \tau\in C_0\cup Q \text{ 时};\\-3,\ \text{当 } \tau\in C_1\cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

2）当 ff' 为偶数，$q=p+6$ 时，序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶，其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2,\ \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\1,\ \text{当 } \tau\in C_1\cup Q \text{ 时};\\5,\ \text{当 } \tau\in C_0\cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

3）当 ff' 为奇数，$q=p+4$ 时，序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶，其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2.\ \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\1,\ \text{当 } \tau\in C_0\cup Q \text{ 时};\\3,\ \text{当 } \tau\in C_1\cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

证明　根据序列偶的定义，序列偶 (x,y) 的相关函数

$R_{(x,y)}(\tau)=|\{t: t\in C_0, t+\tau\in C_0\}|+|\{t: t\in C_0, t+\tau\in P\}|+|\{t: t\in C_1, t+\tau\in R\}|+$

$$|\{t:t\in Q,t+\tau\in R\}|+|\{t:t\in P,t+\tau\in C_0\}|+|\{t:t\in P,t+\tau\in P\}|+$$
$$|\{t:t\in R,t+\tau\in C_0\}|+|\{t:t\in R,t+\tau\in P\}|-|\{t:t\in C_0,t+\tau\in R\}|-$$
$$|\{t:t\in C_1,t+\tau\in C_0\}|-|\{t:t\in C_1,t+\tau\in P\}|-|\{t:t\in Q,t+\tau\in C_0\}|-$$
$$|\{t:t\in Q,t+\tau\in P\}|-|\{t:t\in P,t+\tau\in R\}|-|\{t:t\in R,t+\tau\in R\}|=$$
$$|(C_0+\tau)\cap C_0|+|(C_0+\tau)\cap P|+|(C_1+\tau)\cap R|+|(Q+\tau)\cap R|+$$
$$|(P+\tau)\cap C_0|+|(P+\tau)\cap P|+|(R+\tau)\cap C_0|+|(R+\tau)\cap P|-$$
$$|(C_0+\tau)\cap R|-|(C_1+\tau)\cap C_0|-|(C_1+\tau)\cap P|-|(Q+\tau)\cap C_0|-$$
$$|(Q+\tau)\cap P|-|(P+\tau)\cap R|-|(R+\tau)\cap R|.$$

当 $\tau=0$ 时,容易得到序列偶的峰值为

$$R_{(x,y)}(0)=\frac{(p-1)(q-1)}{2}+(q-1)-1=\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2.$$

当 $\tau\neq 0$ 时,由引理 1— 引理 10 可得:

1) 若 ff' 为偶数,则当 $\tau\in C_0$ 时,$\Delta_0=R_{(x,y)}(\tau)=7)(0,0)+\frac{q-1}{2}+1+0+\frac{q-3}{2}+0+1+0-0-(1,0)-\frac{q-3}{2}-(\frac{p-1}{2}-1)-1-0-0=\frac{q-p}{2}+2$;

当 $\tau\in C_1$ 时,$\Delta_1=R_{(x,y)}(\tau)=(1,1)+\frac{q-3}{2}+0+0+\frac{q-1}{2}+0+0+0-1-(0,1)-\frac{q-1}{2}-\frac{p-1}{2}-1-0-0=\frac{q-p}{2}-2$;

当 $\tau\in Q$ 时,$\Delta_2=R_{(x,y)}(\tau)=\frac{(p-3)(q-1)}{4}+\frac{q-1}{2}+0+1+\frac{q-1}{2}+0+0+0-0-\frac{(p-1)(q-1)}{4}-\frac{q-1}{2}-0-0-0-0=1$;

当 $\tau\in P$ 时,$\Delta_3=R_{(x,y)}(\tau)=\frac{(p-1)(q-3)}{4}+0+0+0+0+(q-2)+0+1-0-\frac{(p-1)(q-1)}{4}-0-\frac{p-1}{2}-0-1-0=-p+q-1$.

由以上分析可知 $\Delta_0\neq\Delta_1$,若序列偶(x,y)要构成三值自相关三元序列偶,则需要满足 $\Delta_0=\Delta_2=1$ 或 $\Delta_1=\Delta_2=1$.

若 $\Delta_0=1$,则 $q=p-2$. 此时 $\Delta_1=\Delta_3=-3$,序列偶(x,y)构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为 $R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2, & \text{当 } \tau=0 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } \tau\in C_0\cup Q \text{ 时;}\\ -3, & \text{当 } \tau\in C_1\cup P \text{ 时.}\end{cases}$

若 $\Delta_1=1$,则 $q=p+6$. 此时 $\Delta_0=\Delta_3=5$,序列偶(x,y)构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为 $R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2, & \text{当 } \tau=0 \text{ 时;}\\ 1, & \text{当 } \tau\in C_1\cup Q \text{ 时;}\\ 5, & \text{当 } \tau\in C_0\cup P \text{ 时.}\end{cases}$

2) 若 ff' 为奇数,则当 $\tau\in C_0$ 时,$\Delta'_0=R_{(x,y)}(\tau)=(0,0)+\frac{q-3}{2}+0+0+\frac{q-3}{2}+0+1+0-1-(1,0)-\frac{q-1}{2}-(\frac{p-1}{2}-1)-1-0-0=\frac{q-p}{2}-1$;

当 $\tau\in C_1$ 时,$\Delta'_1=R_{(x,y)}(\tau)=(1,1)+\frac{q-1}{2}+1+0+\frac{q-1}{2}+0+0+0-0-(0,1)-\frac{q-3}{2}-$

$\frac{p-1}{2}-1-0-0=\frac{q-p}{2}+1$;

当 $\tau \in Q$ 时, $\Delta'_2=R_{(x,y)}(\tau)=\Delta_2=1$;

当 $\tau \in P$ 时, $\Delta'_3=R_{(x,y)}(\tau)=\Delta_3=-p+q-1$.

注意到 $\Delta'_0 \neq \Delta'_1$,若序列偶 (x,y) 要构成三值自相关三元序列偶,则 $\Delta'_0=\Delta'_2=1$ 或 $\Delta'_1=\Delta'_2=1$.

若 $\Delta'_0=1$,则 $q=p+4$. 此时 $\Delta'_1=\Delta'_3=3$,序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q-2,\text{ 当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } \tau \in C_0 \cup Q \text{ 时};\\ 3,\text{ 当 } \tau \in C_1 \cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

若 $\Delta'_1=1$,则 $q=p$,这与 p 和 q 为不同的奇素数矛盾,舍去. 证毕.

算例 1 令 $p=5$, $q=3$,则 $N=15$. 取 $g=2$ 为 $GF(5)$ 和 $GF(3)$ 的公共原根,取 $x=7$,则 $C_0=\{1,2,4,8\}$, $C_1=\{7,14,13,11\}$, $P=\{5,10\}$, $Q=\{3,6,9,12\}$. 由定理 1,可以构造出一个三值自相关三元序列偶 (x,y),其中 $x=(-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1,-1,1,1,1,1)$, $y=(1,-1,-1,0,-1,-1,0,0,-1,0,-1,0,0,0,0)$,其相应的自相关函数为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}5,\text{ 当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } \tau \in C_0 \cup Q \text{ 时};\\ -3,\text{ 当 } \tau \in C_1 \cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

通过类似定理 1 的证明,可得到如下定理 2—定理 4.

定理 2 设 $N=pq$,其中 $p=2f+1$, $q=2f'+1$ 为不同的奇素数, $\gcd(p-1,q-1)=2$. 令

$$x(t)=\begin{cases}-1,\text{ 当 } t \in C_0 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } t \in C_1 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } t \in Q \text{ 时};\\ -1,\text{ 当 } t \in P \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } t \in R \text{ 时};\end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases}-1,\text{ 当 } t \in C_0 \text{ 时};\\ 0,\text{ 当 } t \in C_1 \text{ 时};\\ 0,\text{ 当 } t \in Q \text{ 时};\\ -1,\text{ 当 } t \in P \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } t \in R \text{ 时}.\end{cases}$$

1) 当 ff' 为偶数, $q=p+2$ 时,序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q,\text{ 当 } \tau=0 \text{ 时};\\ -1,\text{ 当 } \tau \in C_1 \cup P \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } \tau \in C_0 \cup Q \text{ 时}.\end{cases}$$

2) 当 ff' 为偶数, $q=p+6$ 时,序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q,\text{ 当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } \tau \in C_1 \cup Q \text{ 时};\\ 3,\text{ 当 } \tau \in C_0 \cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

3) 当 ff' 为奇数, $q=p+8$ 时,序列偶 (x,y) 构成三值自相关三元序列偶,其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}\frac{(p-1)(q-1)}{2}+q,\text{ 当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1,\text{ 当 } \tau \in C_0 \cup Q \text{ 时};\\ 5,\text{ 当 } \tau \in C_1 \cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

算例 2 令 $p=3$, $q=11$,则 $N=33$. 取 $g=2$ 为 $GF(3)$ 和 $GF(11)$ 的公共原根,取 $x=23$,则 $C_0=\{1,2,4,8,16,32,31,29,25,17\}$, $C_1=\{23,13,26,19,5,10,20,7,14,28\}$, $P=\{3,6,9,12,15,18,21,$

24,27,30}, $Q=\{11,22\}$. 由定理 2 可以构造出一个三值自相关三元序列偶(x,y), 其中 $x=(1,-1,-1,-1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,-1,-1,-1)$, $y=(1,-1,-1,-1,-1,0,-1,0,-1,-1,0,0,-1,0,0,-1,-1,-1,-1,0,0,-1,0,0,-1,-1,0,-1,0,-1,-1,-1,-1)$, 其相应的自相关函数为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}21, \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1, \text{当 } \tau\in C_0\cup Q \text{ 时};\\ 5, \text{当 } \tau\in C_1\cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 3 设 $N=pq$, 其中 $p=2f+1$, $q=2f'+1$ 为不同的奇素数, $\gcd(p-1,q-1)=2$. 令

$$x(t)=\begin{cases}-1, \text{当 } t\in C_0\cup P \text{ 时};\\ 1, \text{当 } t\in C_1\cup Q \text{ 时};\\ 0, \text{当 } t\in R \text{ 时};\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}-1, \text{当 } t\in C_0\cup P \text{ 时};\\ 0, \text{当 } t\in C_1\cup Q \text{ 时};\\ 1, \text{当 } t\in R \text{ 时}.\end{cases}$$

当 ff' 为偶数, $q=p+6$ 时, 序列偶(x,y) 构成三值自相关三元序列偶, 其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}(p+1)(q-1)/2, \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 1, \text{当 } \tau\in C_1\cup Q \text{ 时};\\ 4, \text{当 } \tau\in C_0\cup P \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 4 设 $N=pq$, 其中 $p=2f+1$, $q=2f'+1$ 为不同的奇素数, $\gcd(p-1,q-1)=2$. 令

$$x(t)=\begin{cases}-1, \text{当 } t\in C_0\cup P \text{ 时};\\ 1, \text{当 } t\in C_1\cup Q\cup R \text{ 时};\end{cases}\qquad y(t)=\begin{cases}1, \text{当 } t\in C_0\cup P \text{ 时};\\ -1, \text{当 } t\in C_1\cup Q \text{ 时};\\ 0, \text{当 } t\in R \text{ 时}.\end{cases}$$

当 ff' 为偶数, $q=p+2$ 时, 序列偶(x,y) 构成三值自相关三元序列偶, 其相关函数值的分布为

$$R_{(x,y)}(\tau)=\begin{cases}-pq+1, \text{当 } \tau=0 \text{ 时};\\ 0, \text{当 } \tau\in C_1\cup P \text{ 时};\\ 2, \text{当 } \tau\in C_0\cup Q \text{ 时}.\end{cases}$$

参考文献:

[1] 贾彦国,郭继山,崔莉,等. 最佳三进阵列偶构造方法研究[J]. 电子与信息学报,2008,30(4):814-816.
[2] 毛飞,吴宁,周正. 最佳三元序列偶理论研究[J]. 电子与信息学报,2008,30(11):2622-2625.
[3] 崔珊珊,许成谦. 伪随机三元序列偶的研究[J]. 电子技术,2007,34(11):177-180.
[4] 刘永山,王德臣,贾彦国,等. 准最佳三进阵列偶[J]. 计算机工程与应用,2011,47(12):113-116.
[5] 杨小红. 基于分圆类的差集偶及序列偶构造方法研究[D]. 秦皇岛:燕山大学,2014.
[6] PENG X P, XU C Q. The constructions of almost binary sequence pairs with three-level correlation based on cyclotomy[J]. Journal of Electronics(China), 2012,29(1/2):9-16.
[7] JIA Y G, DUAN X B, SHI Y, et al. The constructions of ternary sequence pairs based on cyclotomy[J]. ICIC Express Letters, 2015,9(6):1761-1767.
[8] WHITEMAN A L. A family of difference sets[J]. Illinois J Math, 1962,40(6):107-121.
[9] DING C S. Autocorrelation values of generalized cyclotomic sequences of order two[J]. IEEE Trans Inf Theory, 1998,44(4):1699-1702.