

文章编号: 1004-4353(2018)03-0224-05

# 利用 Lyapunov 控制实现原子间分数量子态

张大伟

( 营口理工学院, 辽宁 营口 115014 )

**摘要:** 提出了一个利用 Lyapunov 控制方法在  $4 \times 4$  光晶格内实现分数量子态的理论方案. 通过优化控制场, 使保真度达到一个较高的稳定值, 并且控制场对系统所产生的不确定度具有鲁棒性. 该控制方案可以推广到  $n \times n$  光晶格系统中, 并且可为研究多体系统中的强相互作用提供依据.

**关键词:** Lyapunov; 控制场; 分数量子态

**中图分类号:** O413.3

**文献标识码:** A

## Implementing fractional quantum state for atoms based on Lyapunov control

ZHANG Dawei

( *Yingkou Institute of Technology, Yingkou 115014, China* )

**Abstract:** We propose a theoretical scheme to prepare the fractional quantum state by Lyapunov control in  $4 \times 4$  optical lattice in this paper. The fidelity can achieve a high stable value by optimizing the control fields, and it is insensitive to the influence of uncertainties for control fields. Our scheme can be generalized to  $n \times n$  lattice, which provides a powerful criterion for researching the strong interaction in multi-body systems.

**Keywords:** Lyapunov; control field; fractional quantum state

## 0 引言

晶格中的系统是否具备动力学控制构建和相互作用的能力, 是衡量多体物理系统的一个重要指标<sup>[1-2]</sup>. 在带有冷原子的光晶格系统中, 由于受束缚的玻色-爱因斯坦凝聚(BEs)系统能够提供理想的实现条件和必需的哈密顿函数, 因此人们在研究由跃迁和捕获势等方面所对应的凝聚问题时可以通过这种方法来建立拓扑绝缘态<sup>[3-4]</sup>. 近些年来, 在原子隙中实现分数量子霍尔效应已成为研究拓扑量子计算问题的一个潜在资源, 特别是研究谐波陷阱中旋转的 BEs 问题. 2005 年, Sorensen 等首次提出了一个利用光晶格系统来实现分数量子霍尔效应的方案, 其方法是通过计算拟设波函数与拉夫林波函数的迭加来实现分数量子霍尔态的制备, 利用该方法所得出的能量隙的尺度稍大于磁隙中的能量尺度, 并具有分数特性<sup>[5]</sup>. 在此之后, 许多学者对分数量子霍尔效应问题作了进一步的研究<sup>[6-8]</sup>.

近些年来量子控制科学得到迅速发展, 其已经在量子信息、量子模拟等领域起到重要作用<sup>[9-10]</sup>. Lyapunov 控制作为一种态转换的方法, 具有设计简单、稳定性强的优点, 适用于将量子态渐近地制备到稳态上<sup>[9]</sup>. 受该方法的启发, 本文提出一个利用 Lyapunov 控制方法在晶格中实现分数量子态的方案, 并通过不确定度掺杂验证了本文方法的有效性.

## 1 分数量子态与 Lyapunov 控制

### 1.1 分数量子态

分数量子霍耳效应(FQH)发生在带有强磁场作用下的带电粒子之间,是一种具有高纠缠形式的量子态,可以展现出诸如不可压缩性、带有分数统计意义的任意子激发等特征<sup>[3-4]</sup>. 拉夫林提出了一种基于圆柱模式思维的特殊波函数<sup>[3]</sup>: 若  $N$  是系统中的电子数,  $N_\phi$  是系统中的总磁通量数,  $\phi_0 = h/e$  是单位量子磁通, 当满足  $N/N_\phi = 1/m$  时( $m$  是整数), 这种特殊波函数在二维空间下可以描述为:

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_N) = e^{(-\sum_j |z_j|^2)/4} \prod_{j>k} (z_j - z_k)^m, \quad (1)$$

其中  $z = x + iy$  是电子的复坐标. 通常情况下, 分数量子霍耳效应只发生在带有磁场作用的费米子之间, 但若原子之间的相互作用是排斥的, 在原子之间也可以显现出相类似的特性. 根据泡利原理所描述的特征, 当公式(1)中的  $m$  为奇数时, 该种波函数通常应用于费米系统中; 反之, 则应用于玻色系统中. 在此令  $m = 2$ , 则在圆柱面上所制备出的拟设波函数<sup>[11]</sup>

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_N) = f_{\text{rel}}(z) f_{\text{c.m.}}^l(Z) e^{(-\sum_j |y_j|^2)/2}, \quad (2)$$

其中  $f_{\text{rel}}$  是关联函数部分,  $f_{\text{c.m.}}^l(Z)$  表示质心动量波函数,  $Z = \sum_i z_i$  表示质心函数. 通常质心波函数用  $\vartheta$  函数进行描述:

$$f_{\text{c.m.}}^l(Z) = \vartheta \left[ \begin{matrix} l/2 + (N_\phi - 2)/4 \\ -(N_\phi - 2)/2 \end{matrix} \right] \left( \frac{2Z}{L} \middle| 2i \right), \quad (3)$$

其中  $l = 0, 1$  分别对应哈密顿基态变换所产生的两个简并的基态,  $L$  对应所用晶格尺寸.

### 1.2 Lyapunov 控制

一般认为封闭的量子系统的密度函数可以由如下的刘维尔方程来描述:

$$\dot{\rho} = -i[H_0 + \sum_{n=1}^k f_n(t) H_n, \rho]. \quad (4)$$

其中:  $H_0$  为系统的自由哈密顿量(令  $\hbar = 1$ );  $H_n (n = 1, 2, \dots, k)$  是不含时的控制哈密顿量;  $f_n(t)$  是含时的实函数控制场, 通常和电磁场的振幅有关;  $k$  代表电磁场的个数. 通常 Lyapunov 控制函数用  $V$  表示, 通过设计随时间变化的控制场来保证  $V$  单调递减, 由此系统就可以收敛到由  $\dot{V} = 0$  所决定的最大不变集中. 若最大不变集中只包含目标态, 则系统将会逐渐收敛至目标态上. 考虑如下形式的函数  $V = \text{Tr}(P\rho)$ , 其中  $P$  是半正定的厄米算符, 用以保证  $V \geq 0$ . 为得到准确的控制律, 对控制函数  $V$  求导:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \text{Tr}(-iP[H_0 + \sum_{n=1}^k f_n(t) H_n, \rho]) = \text{Tr}(-i\rho[P, H_0]) + \sum_{n=1}^k f_n(t) \text{Tr}(-i\rho[P, H_n]) = \\ &= \sum_{n=1}^k f_n(t) T_n. \end{aligned} \quad (5)$$

为了满足演化条件, 必须满足  $[P, H_0] = 0$ , 这样才能保证当控制结束时  $V$  达到最小值或  $\dot{V} \leq 0$ , 使系统的态演化到目标态上. 因此  $P$  的构造形式为

$$P = P_f |\varphi\rangle_f \langle \varphi| + \sum_{i \neq f} P_i |\varphi\rangle_i \langle \varphi|, \quad (6)$$

其中  $|\varphi\rangle_i (i = 1, \dots, N)$  是自由哈密顿量  $H_0$  的本征态, 本征值为  $P_i$ . 为了达到量子态的变换要求, 目标态的本征值必须满足  $P_f < P_i$ . 控制场  $f_n(t) = -A \langle \varphi | i[H_n, P] | \varphi \rangle$  ( $A$  是大于 0 的常数),  $T_n = \text{Tr}(-i\rho[P, H_n])$ .

## 2 二维方晶格系统模型

在二维方晶格中, 由于库仑相互作用的存在, 原子之间会产生一种强耦合现象<sup>[5]</sup>, 此时该系统的哈

密顿量可表示为

$$H_0^{\text{eff}} \approx -J \sum_{x,y} \hat{a}_{x+1,y}^+ \hat{a}_{x,y} + \hat{a}_{x,y+1}^+ \hat{a}_{x,y} e^{i2\pi\alpha x} + \text{H. c.}, \quad (7)$$

其中  $\hat{a}_j$  和  $\hat{a}_j^+$  是第  $j$  个玻色子湮灭算符和产生算符,  $J$  是轨道振幅,  $2\pi\alpha$  是粒子穿过晶格时的相位要求. 晶格内各个原子所在的位置可以利用  $x$  和  $y$  的坐标进行表示, 因此式(7)就可以用来描述磁场作用下的每个带电粒子在晶格中的运动情况.

考虑到每个格点上的粒子数和  $\alpha$  所受的限制, 带有短程相互作用的系统将会被约化为处于一种被连续性限制作用的状态, 类似于处在强磁场作用中的粒子. 此时系统中的所有低能态都处于简并状态, 而激发态则被看作是各种朗道能态的混合. 当  $N_\phi = mN$  时, 若系统中的相互作用是排斥的, 就可认为其基态是完美的拉夫林态<sup>[11]</sup>.

为了通过控制实现由初态转换到稳定目标态的目的, 本文将自由哈密顿  $H_0$  中的基态(对应于式(2)中  $l=0$  部分)作为系统的目标态, 并将系统的初始状态看作是原子处于晶格中的某个位置  $|(x_i, y_i); (x_j, y_j)\rangle$  上, 其中  $(x, y)$  是原子的坐标. 假设两个原子最初处于相邻的位置, 则初态可表示为  $|\phi\rangle_{\text{in}}^N = |(1, 1); (2, 1)\rangle$ . 在满足周期性边界条件的方晶格系统中, 由于存在原子间的耦合相互作用, 因此晶格中每个格点的粒子占有数不应超过 1, 此时控制场的哈密顿量为:

$$\begin{aligned} H_1 &= e^{i\pi} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 2); (1, 1)| + |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(3, 1); (1, 1)| + \\ &e^{i\pi} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 4); (1, 1)| + \text{H. c.}, \\ H_2 &= e^{i\pi/2} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (1, 2)| + |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(4, 1); (2, 1)| + \\ &e^{-i\pi/2} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (1, 1)| + \text{H. c.} \end{aligned} \quad (8)$$

在控制哈密顿量中, 本文考虑了原子向各个位置进行跃迁的所有情况. 在数值模拟过程中, 厄米算符取  $P_i = \lambda_i$ ,  $P_f = -10$ , 迭加的结果如图 1 所示. 由图 1 可以看出, 保真度曲线并没有收敛为某一稳定值, 而是出现了持续的振荡, 并且控制场也不收敛至 0. 这说明, 初态在经过控制过程后并没有转换到目标态上, 即没能实现稳定地控制到目标态上的目的.

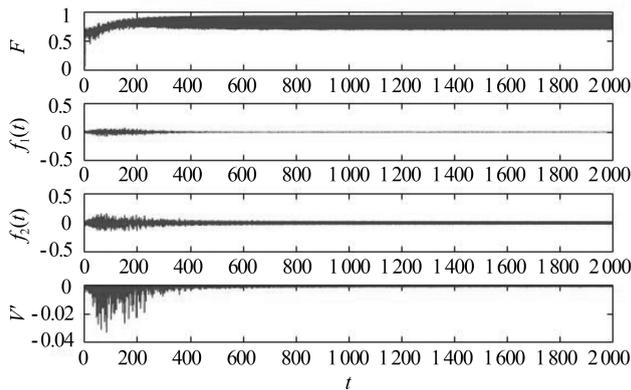


图 1 通用控制场保真度随时间的演化图(从上到下分别对应保真度  $F$ 、控制场  $f_1(t)$ 、控制场  $f_2(t)$  以及控制函数  $V'$ )

为了以较高的保真度实现稳定的目标态, 本文采用优化控制场的方法来进行控制:

$$\begin{aligned} H_2 &= A \cdot (e^{i\pi/2} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (1, 2)| + e^{-i\pi/2} |(1, 2); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (1, 1)|) + \\ &B \cdot (e^{i\pi/2} |(4, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (1, 1)| + e^{-i\pi/2} |(1, 1); (2, 1)\rangle\langle(2, 1); (4, 1)|), \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $A, B \in [-1, 1]$ . 从图 2 中可以看出, 当选择适当的优化因子  $A$  和  $B$  时, 系统的保真度可以达到较高值. 在数值模拟计算时选取  $A=0.9$ ,  $B=-0.2$ , 并将控制时间选为  $t=1000$  时, 系统的保真度达到稳定, 其值为 0.952, 如图 3 所示.

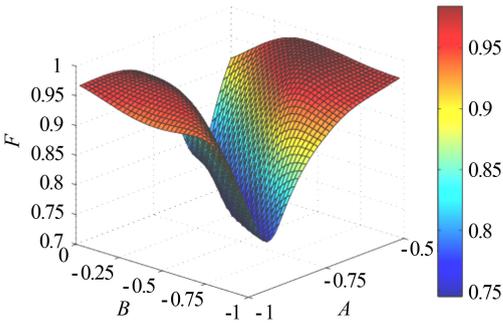


图 2 控制优化参数 A 和 B 对保真度的影响

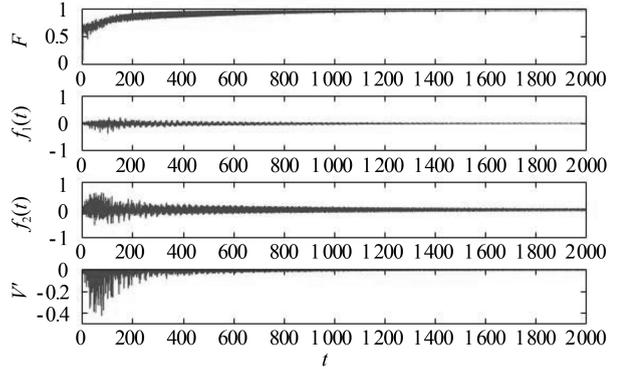


图 3 优化后保真度随时间的演化图

### 3 态变换的鲁棒性

在上述控制方案中没有对系统掺杂任何干扰,但在具体的实现过程中,完全无干扰的系统是很难实现的,因此必须要对一些不确定因素进行分析.通常情况下,一个带有微扰的自由哈密顿量可以描述为

$$H_0 \rightarrow H_0 + \delta H_0, \tag{10}$$

式中  $\delta$  是实数,表示不确定度的强度.本文将不确定度掺杂在不同的控制哈密顿中,通过图形描述来分析不确定度对系统保真度的影响.由图 4 可以看出,自由哈密顿中的不确定度对系统有很明显的影响,只有当不确定度为 0 时,保真度才能达到最高(图 4 中两条曲线分别表示原子 1 和原子 2 在竖直方向的参量变化对保真度的影响).图 5 显示,控制场中的不确定度对保真度的影响并不明显,这说明控制场对加入的不确定度并不敏感,即具有一定的鲁棒性.

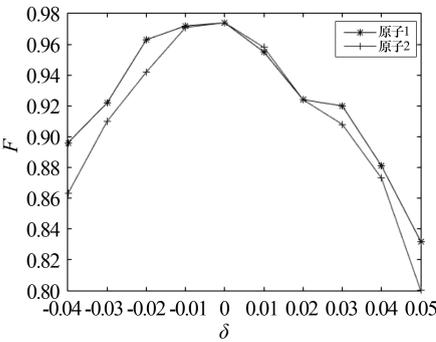


图 4  $H_0$  中微扰  $\delta$  与保真度之间的关系

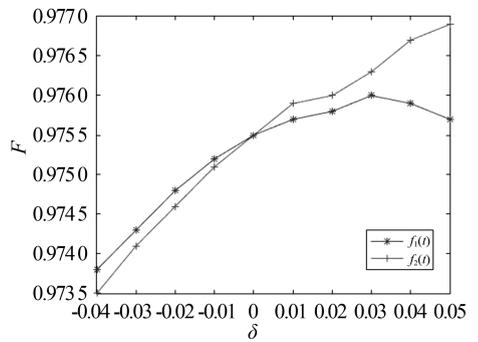


图 5 控制场  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  中微扰  $\delta$  与保真度之间的关系

产生上述现象的原因可以解释为:系统进行演化时,保真度以 e 指数的形式进行增长.由于原子之间短程相互作用的存在,系统中所加入的控制场对系统的作用逐渐减小,并最终变为一种持续性的微弱控制.当控制函数趋于微小值时,系统的保真度就会逐渐达到一个稳定值,且之后保真度不再随着控制场的变化而改变.当自由哈密顿量  $H_0$  中含有微扰  $\delta$  时, $\delta$  始终存在于系统中并随系统一起参与演化,且不随着演化时间的增加而减少,因此就使得系统产生较大的振荡,影响了原子跃迁的能量转化.而在控制场哈密顿  $H_c$  中,不确定度  $\delta$  只影响了控制场的振幅,并未引起其他变化,并且控制场随时间的增加而不断减小,因此不确定度  $\delta$  对系统保真度的影响也不大.

### 4 结论

本文提出一个应用 Lyapunov 控制方法来实现分数量子态转换的方案.通过数值模拟表明,优化后的控制场可使初态在经过演化后达到一个较高的稳定值,并且方案中的控制场对不确定度的影响具有

鲁棒性. 由于本文方案中选用的晶格模型具有周期性边界条件的特征, 因此可以将本文方案拓展到  $n \times n$  多维方阵系统中. 本文研究所得结果对研究多体系统间的强相互作用也具有一定的指导意义, 即在多体系统中能够实现其他量子态的制备和转换.

### 参考文献:

- [1] Imamoglu A, Schmidt H, Woods G, et al. Strongly interacting photons in a nonlinear cavity[J]. Phys Rev Lett, 1997,79(8):1467-1470.
- [2] Regal C A, Greiner M, Jin D S. Observation of resonance condensation of Fermionic atom pairs[J]. Phys Rev Lett, 2004,92(4):040403.
- [3] Laughlin R B. Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations[J]. Phys Rev Lett, 1983,50(18):1395-1398.
- [4] Raizen M, Salomon C, Niu Q. New light on quantum transport[J]. Phys Today, 1997,50(7):30-34.
- [5] Sorensen A S, Demler E, Lukin M D. Fractional quantum Hall states of atoms in optical lattices[J]. Phys Rev Lett, 2005,94(8):086803.
- [6] Umucalilar R O, Carusotto I. Fractional quantum Hall states of photons in an array of dissipative coupled cavities [J]. Phys Rev Lett, 2012,108(20):206809.
- [7] 朱国毅,王瑞蕊,张广铭. Majorana 费米子与拓扑量子计算[J]. 物理, 2017,46(3):154-167.
- [8] 徐雷,张蓓,孔维新,等. Kagome 晶格中的拓扑平带和量子霍尔效应[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2018,35(2): 127-130.
- [9] Dentsch I H, Jessen P S. Quantum-state control in optical lattices[J]. Phys Rev A, 1998,57(3):1972-2007.
- [10] Yi X X, Huang X L, Wu C F, et al. Systems into decoherence-free subspaces by Lyapunov control[J]. Phys Rev A, 2009,80(5):052316.
- [11] Hafezi M, Sorensen A S, Demler E, et al. Fractional quantum Hall effect in optical lattices[J]. Phys Rev A, 2007,76(2):023613.

(上接第 216 页)

综上,得系统(1)在  $\Omega$  内围绕正平衡点  $B(x_*, y_*)$  存在唯一稳定的极限环. 证毕.

本文所得的定理 3 和定理 4 表明,两种群均不会灭绝,它们的数量在正平衡点  $B(x_*, y_*)$  邻近呈现为稳定的周期振荡.

### 参考文献:

- [1] Andrews J F. A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates [J]. Biotechnol Bioeng, 1968,10:707-723.
- [2] Sokol W, Howell J A. Kinetics of pheol oxidation by washed cells[J]. Biotechnol Bioeng, 1980,23(1):2039-2049.
- [3] 石志高,吴承强. 一类食饵种群具有常数收获率的 Holling-IV 类功能性反应的捕食系统的定性分析[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2008,36(3):327-330.
- [4] 张敬,芦雪娟,何延治. 一类具有 Holling-IV 型功能性反应捕食模型的定性分析[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2013,39(2):93-96.
- [5] 张敬,高文杰,周莉. 两种群分别有常投放率和常收获率的 Holling-IV 类捕食系统[J]. 吉林大学学报(理学版), 2011,49(1):11-15.
- [6] 石志高. 两种群具有线性控制项的 Holling-IV 类食饵-捕食系统的鞍结分岔下的轨线结构[J]. 闽江学院学报, 2016(2):12-18.
- [7] Liu Xinxin, Huang Qingdao. The dynamics of a harvested predator-prey system with Holling type IV functional response[J]. Biosystems, 2018,169/170:26-39.
- [8] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985:208-212.