文章编号：1004-4353(2015)03-0203-04

基于首次积分和向量场的二维 Lotka-Volterra 系统的稳定性

唐晓伟[1,2]
(1.齐鲁师范学院 数学学院，山东 济南 250200；2.山东师范大学 数学科学学院，山东 济南 250014)

摘要：为研究二维 Lotka-Volterra 系统平衡点的稳定性问题,利用首次积分和向量场给出了平衡点一致稳定的充分条件,同时将结论推广到一般的二维系统中,并用实例验证了本文结论的有效性.

关键词：Lotka-Volterra 系统；首次积分；向量场；稳定性
中图分类号：O175.31　　　　**文献标识码**：A

Stability of a two-dimensional Lotka-Volterra system with first integral and vector field

TANG Xiaowei[1,2]
(1. *Mathematical School*, *Qilu Normal University*, *Jinan* 250200, *China*;
2. *School of Mathematical Science*, *Shandong Normal University*, *Jinan* 250014, *China*)

Abstract: To study the stability for two-dimensional Lotka-Volterra, the sufficient condition of the stability for two-dimensional Lotka-Volterra system was given by using first integral and vector field. Then the conclusion was extended to general two-dimensional systems and the effectiveness was verified by an example.

Key words: Lotka-Volterra system; first integral; vector field; stability

在农业生产和生物资源的管理中,维持某一种群系统内部的平衡对保持整个生态系统的平衡具有重要的作用,因此需要人们根据种群系统所反馈的各种信息来制定相应的管理决策,以保证生物物种的多样性和生产的可持续性.文献[1-3]通过李雅普诺夫函数研究了 Lotka-Volterra 系统平衡点的稳定性问题,但由于在构造李雅普诺夫函数时存在较多困难,上述文献中构造的李雅普诺夫函数不具有通用性.文献[4]研究了一类 Lotka-Volterra 系统的首次积分的存在性,并利用首次积分研究了平衡点的稳定性问题.文献[5]给出了 Lambert W 函数的定义,并将系统首次积分的表达式作为其李雅普诺夫函数,结合 Lambert W 函数的性质讨论了可求得首次积分的 Lotka-Volterra 系统的周期解的存在性和稳定性问题,但是并不是所有的 Lotka-Volterra 系统都能够写出其首次积分的表达式.C. Albert 等[6-7]在研究非线性扰动系统的全局相切性和横截性时提出了一种基于首次积分和向量场的方法,这种方法能够避免构造李雅普诺夫函数时所存在的困难,同时还适用于首次积分不存在的系统.鉴于此,本文利用首次积分和向量场研究了一类二维 Lotka-Volterra 系统平衡点的稳定性,给出了系统平衡点一致稳定的充分条件,并将结果推广到一般的二维非线性系统中,最后用实例验证了结论的有效性.

收稿日期：2015-05-13　　　**作者简介**：唐晓伟(1983—),女,讲师,研究方向为微分方程稳定性.
基金项目：山东省青少年教育科学规划课题(15BSH278)；齐鲁师范学院校级青年教师项目(2014L1002)

1 预备知识和基本结果

令 $\mathbf{R}^2$ 表示二维欧式空间，$\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的范数. 考虑如下的两种群 Lotka-Volterra 系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by);\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(cx-d),\end{cases}\tag{1}$$

其中：$x(t)$ 表示食饵(害虫)的种群数量；$y(t)$ 表示捕食者(天敌)的种群数量；a,b,c,d 为正常数.

引理 1[8] $(0,0)$ 和$(\frac{d}{c},\frac{a}{b})$ 是系统(1)的2个奇点，且系统(1)的经过第一象限内任意一点的轨线都是包含$(\frac{d}{c},\frac{a}{b})$的闭轨.

作线性变换 $x^*=x-\frac{d}{c}$，$y^*=y-\frac{a}{b}$，于是系统(1)等价于如下的系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}t}=-by^*(x^*+\dfrac{d}{c});\\ \dfrac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}t}=cx^*(y^*+\dfrac{a}{b}).\end{cases}\tag{2}$$

显然系统(2)的零解存在. 为方便起见，将 $\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$ 记作 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，引入变量 $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$f(X)=\begin{pmatrix}-by(x+\frac{d}{c})\\cx(y+\frac{a}{b})\end{pmatrix}$，于是系统(2)可写为：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X).\tag{3}$$

定义 1 (i) 对 $\forall\varepsilon>0,\forall t_0\geqslant 0$，若存在 $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当 $\|X_0\|<\delta$ 时，有 $\|X(t)\|<\varepsilon$，$t\geqslant t_0$ 成立，其中 $X(t)=X(t,t_0,X_0)$ 表示系统(3)的过(t_0,X_0)的解，则称系统(3)的零解是稳定的；(ii) 若(i)中的 δ 与 t_0 无关，则称系统(3)的零解是一致稳定的.

定义 2 定义 K 类函数如下：

$$K=\{a(s)\mid a:[0,+\infty)\to[0,+\infty),a(0)=0,a(s)\text{ 关于 }s\text{ 连续且严格单调递增}\}.$$

引理 2 $H(X)=H(x,y)=by+cx-a\ln(y+\frac{a}{b})-d\ln(x+\frac{d}{c})+a(1+\ln\frac{a}{b})+d(1+\ln\frac{d}{c})$ 是系统(3)的一个首次积分，且$(0,0)$是 $H(X)$ 的唯一最小值点.

证明 容易验证 $\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$，且$(0,0)$是 $H(x,y)$ 唯一的稳定点，$H_x(0,0)=0$，$H_y(0,0)=0$，$\begin{vmatrix}H_{xx}&H_{xy}\\H_{xy}&H_{yy}\end{vmatrix}_{(0,0)}>0$，证毕.

定理 1 系统(3)的零解是稳定的.

证明 证明取引理2中的 $H(x,y)$ 作为李雅普诺夫函数即可.

2 主要结果及其证明

考虑具有扰动的两种群 Lotka-Volterra 系统：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X)+h(t,X),\tag{4}$$

其中 $h(t,X)$ 在 $[0,+\infty)\times\Omega$ 上是连续的，Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个包含原点的开集. 不妨假设系统(4)的零解存在，且假设在 t 时刻，系统(4)的解 $X(t)$ 与 $H(X)=H$，$H\in\mathbf{R}$ 相遇，于是有 $H(X(t))\equiv H(X,t)=H$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}H(X,t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial X}\cdot\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial H}{\partial t}=\dfrac{\partial H}{\partial X}(f(X)+h(t,X))=\dfrac{\partial H}{\partial X}\cdot h(t,X)\equiv DH(X)\cdot h(t,X)$，其中 $\dfrac{\partial H}{\partial X}=(\dfrac{\partial H}{\partial x},\dfrac{\partial H}{\partial y})$.

定理 2　若系统(4)满足对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ 及函数 $k(s)\in K$，使得当 $X\in\bigcup(0;\varepsilon)$ 时，$H(X)\in[H_0,H_0+\sigma)$；当 $H(X)\in[H_0,H_0+\sigma)$ 时，$X\in\bigcup(0;k(\varepsilon))$，且对 $\forall X\in\Omega$，$t\in[0,+\infty)$ 有 $DH(X)\cdot h(t,X)\leqslant 0$ 成立，则系统(4)的零解是一致稳定的.

证明　对 $\forall\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，设 $X(t)$ 是系统(4)经过 (t_0,X_0) 的解，于是 $DH(X(t))\cdot h(t,X(t))\leqslant 0$. 对 $\forall t\geqslant t_0$，将上式两端分别在 $[t_0,t]$ 上积分，得

$$\int_{t_0}^{t}DH(X(s))\cdot h(s,X(s))\mathrm{d}s=H(X(t))-H(X_0)\leqslant 0.$$

对上述的 $\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，取 $0<\delta<\min\{\sigma,\varepsilon\}$，当 $\|X_0\|<\delta$ 时，$H(X(t))\leqslant H(X_0)<H_0+\sigma$，故 $\|X(t)\|<k(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$，而 $k(s)\in K$，从而系统(4)的零解是一致稳定的.

更一般地，考虑具有扰动的二维微分系统：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=g(t,X),\tag{5}$$

其中 $g(t,X)$ 在 $[0,+\infty)\times\Omega$ 上是连续的，Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个包含原点的开集. 不妨假设系统(5)的零解存在，且对系统(5)做如下假设：

(H_1) $g(t,X)$ 可写成 $p(X)$ 与 $q(t,X)$ 之和，且 $p(X)$ 关于 X 在 Ω 内是可积的，$q(t,X)$ 关于 X 在 Ω 内可以不可积；

(H_2) 做微分系统 $\dot{X}=p(X)$，该系统的首次积分在 Ω 内存在，设其中一个为 $F(X)$；

(H_3) 令 $F(0)=F_0$，且 F_0 是 $F(X)$，$X\in\Omega$ 的唯一最大(最小)值.

假设在 t 时刻，系统(5)的解 $X(t)$ 与 $F(X)=F$，$F\in\mathbf{R}$ 相遇，于是有 $F(X(t))\equiv F(X,t)=F$，从而 $\dfrac{\mathrm{d}F(X,t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial F}{\partial X}\cdot\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial F}{\partial t}=\dfrac{\partial F}{\partial X}(p(X)+q(t,X))=\dfrac{\partial F}{\partial X}\cdot q(t,X)\equiv DF(X)\cdot q(t,X)$.

定理 3　系统(5)的零解是一致稳定的，若系统(5)满足(H_1)—(H_3)，且

(i) 当 F_0 是 $F(X)$，$X\in\Omega$ 的最小值时，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ 及函数 $\alpha(s)\in K$，使得当 $X\in\bigcup(0;\varepsilon)$ 时，$F(X)\in[F_0,F_0+\sigma)$；当 $F(X)\in[F_0,F_0+\sigma)$ 时，$X\in\bigcup(0;\alpha(\varepsilon))$，且对 $\forall X\in\Omega$，$t\in[0,+\infty)$ 有 $DF(X)\cdot q(t,X)\leqslant 0$ 成立；

(ii) 当 F_0 是 $F(X)$，$X\in\Omega$ 的最大值时，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$ 及函数 $\beta(s)\in K$，使得当 $X\in\bigcup(0;\varepsilon)$ 时，$F(X)\in(F_0-\sigma,F_0]$；当 $F(X)\in(F_0-\sigma,F_0]$ 时，$X\in\bigcup(0;\beta(\varepsilon))$，且对 $\forall X\in\Omega$，$t\in[0,+\infty)$ 有 $DF(X)\cdot q(t,X)\geqslant 0$ 成立.

证明　只需证明当 F_0 是 $F(X)$，$X\in\Omega$ 的最大值时的情形即可，当 F_0 是 $F(X)$，$X\in\Omega$ 的最小值时的证明与之类似，故省略.

对 $\forall\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，设 $X(t)$ 是系统(5)经过 (t_0,X_0) 的解. 由条件(ii)知 $DF(X(t))\cdot q(t,X(t))\geqslant 0$. 对 $\forall t\geqslant t_0$，将上式两端分别在 $[t_0,t]$ 上积分，得

$$\int_{t_0}^{t}DF(X(s))\cdot q(s,X(s))\mathrm{d}s=F(X(t))-F(X_0)\geqslant 0.$$

对上述的 $\varepsilon>0$，$t_0\geqslant 0$，取 $0<\delta<\min\{\sigma,\varepsilon\}$. 当 $\|X_0\|<\delta$ 时，$F(X(t))\geqslant F(X_0)>F_0-\sigma$，故 $\|X(t)\|<\beta(\varepsilon)$，$t\geqslant t_0$，而 $\beta(s)\in K$，从而系统(5)的零解是一致稳定的.

例 1 考虑如下的具扰动的二维微分系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-xy^2t;\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-x^2yt.\end{cases}\tag{6}$$

令 $p(x,y)=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$，$q(t,x,y)=\begin{pmatrix}-xy^2t\\-x^2yt\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=p(x,y)+q(t,x,y)$. 考虑微分系统 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y;\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x,\end{cases}$ 可求得其一个首次积分为 $F(x,y)=x^2+y^2$，且 $F(0)=0$ 是 $F(x,y)=x^2+y^2$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 的唯一最小值. 同时 $DF(x,y)\cdot q(t,x,y)=(2x,2y)\cdot\begin{pmatrix}-xy^2t\\-x^2yt\end{pmatrix}\leqslant 0$；且对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\|X\|=x^2+y^2$，则 $X\in\bigcup(0;\varepsilon)\Leftrightarrow F(X)\in[0,\varepsilon^2)$，从而由定理 3 知，系统(6)的零解是一致稳定的.

参考文献：

[1] Shair Ahmad, Alanc Lazer. Average conditions for global asymptotic stability in a nonautonomous Lotka-Volterra system[J]. Nonlinear Analysis, 2002,40(1):37-49.

[2] Shair Ahmad, Ivanka M Stamova. Asympotic stability of N-dimensional impulsive competitive system[J]. Nonlinear Analysis, 2007,8(2):654-663.

[3] Zhao Jingdong, Guo Xin, Han zhixia, et al. Average conditions for competitive system in a nonautonomous two dimensional Lotka-Volterra system[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2013,57(5):1131-1138.

[4] Tang S Y, Xiao Y N, Chen L, et al. Integrated pest management models and the dynamical behavior[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2005,67(1):115-135.

[5] Tang S Y, Chen L. Modelling and analysis of integrated pest management strategy[J]. Discrete and Continuous Dynamics System, 2004,4(3):759-768.

[6] Albert C Luo J. A theory for n-dimensional nonlinear dynamics on continuous vector fields[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2007,12(2):117-194.

[7] Albert C Luo J. Continuous Dynamical Systems[M]. Beijing: Higher Education Press, 2012.

[8] 宋新宇,郭红建,师向云. 脉冲微分方程理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2011:208-209.