

文章编号: 1004-4353(2014)04-0360-05

基于灰色理论和 Usher 曲线的 PHC 管桩 单桩竖向极限承载力预测

王少东, 方光秀*

(延边大学工学院 土木工程系, 吉林 延吉 133002)

摘要: 针对利用现行规范公式计算 PHC 管桩的竖向极限承载力值存在结果偏低的问题,根据竖向静载荷文献资料,基于灰色理论 GM(1,1)模型和 Usher 曲线模型预测单桩的极限承载力,并采用 MATLAB 软件实现预测模型算法.工程实例分析表明:灰色预测模型的预测精度与竖向静载试验数据级数选取、预测距离有密切关系;Usher 曲线模型对桩极限承载力的预测精度大大高于灰色模型,此结果可为类似工程地质条件下 PHC 管桩单桩竖向极限承载力的预测提供借鉴.

关键词: PHC 桩; 极限承载力; 灰色预测模型; Usher 曲线模型

中图分类号: TU472.6 **文献标识码:** A

The single pile vertical ultimate bearing capacity prediction of PHC pipe piles based on the grey theory and Usher curve

WANG Shaodong, FANG Guangxiu*

(Department of Structure Engineering, College of Engineering, Yanbian University, Yanji 133002, China)

Abstract: In view of the current specification formula for calculating the ultimate bearing capacity of PHC pipe piles vertical value is generally low, according to the literature data of vertical static load, using the theory of grey GM(1,1) model and Usher curve model for predicting ultimate bearing capacity of single pile, to realize the predictive model algorithm by using MATLAB software. The analysis of project instance shows that: the prediction accuracy of grey forecasting model is closely related to the selection of vertical static load test data series and prediction distance; Usher curve model has higher precision than the grey model for the forecast of ultimate bearing capacity of pile, which can provide appreciation for the similar engineering geology PHC pipe piles under the condition of the single pile vertical ultimate bearing capacity prediction.

Key words: PHC pile; ultimate bearing capacity; grey forecasting model; Usher curve model

PHC 桩是在近代高性能混凝土(HPC)和预应力技术的基础上发展起来的混凝土预制构件,具有承载力高、抗弯性能好、应用范围广、沉桩质量可靠、工程造价低等特点^[1].按照现行《建筑地基基础设计规范》(GB 50007—2011)的公式计算 PHC 管桩的竖向承载力值普遍偏低,且一般的静载荷试验很难达到极限荷载.另外,设计人员为了保证工程安全,在缺乏工程实践资料的情况下,往往过于保守,造成不必要的浪费^[2].目前,利用灰色理论模型^[3]或 Usher 曲线模型^[4-6]预测灌注桩、钢管桩极限承载力的研究已有报道,但有关预测 PHC 单桩极限承载力及用两种模型进行对比的研究很少.为了进一步研究上述模型的预测精度,扩大其适应范围,本文结合文献[7]的桩荷载值和沉降值,利用灰色系统理论模型和 Usher 曲线预测 PHC 管桩单桩竖向极限承载力,并对模型的精度进行了讨论.

* 通信作者: 方光秀(1967—),男,博士,副教授,研究方向为现代土木工程建设与项目管理.

1 灰色预测模型的建立

灰色系统理论是基于小部分已知信息或部分未知信息的小样本研究,并通过对已知部分信息的采集和开发,从中提取有用的信息,最终达到有效控制系统运行行为和正确认识和描述事物演化规律的理论^[8].

1.1 非等步长 GM(1,1)模型建立

GM(1,1)灰色预测模型是对杂乱无章的数据序列进行变换,借助曲线对所获得的规律性较强的新数据序列进行准确的逼近,一般只需 4 个以上的数据即可建模^{[1] 11-12}. GM(1,1)灰微分方程^[3]为

$$x^{(0)}(k) + a \times z^{(1)}(k) = b,$$

其中: $x^{(0)}(k)$ 是灰导数,对应于 $\frac{dx^{(1)}}{dt}$; $z^{(1)}(k)$ 为背景值,对应于 $x^{(1)}(k)$; a 为发展系数; b 为灰作用量,是微分的参数. 基于以上灰微分方程,本文建立与静载荷试验 $Q(i)$ 和所对应的沉降值 $S(i)$ 有关的微分方程. 荷载原始值及对应的沉降为: $Q_i^{(0)}, i=1,2,\cdots,n; S_i^{(0)}, i=1,2,\cdots,n$. 对其做一次累减得 $Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - Q_{i-1}^{(0)}, i=1,2,\cdots,n; S_i^{(1)} = S_i^{(0)} - S_{i-1}^{(0)}, i=1,2,\cdots,n$.

根据灰色系统理论的建模方法,本文建立一阶线性动态微分方程,记为 GM(1,1) 模型:

$$\frac{dQ^{(0)}}{dS^{(0)}} + aQ^{(0)} = b, \tag{1}$$

其中 a 为发展系数(1/mm); b 为灰作用量(kN/mm). 用最小二乘法可求得 $[a,b]^T = (D^T D)^{-1} D^T Y$, 其中

$$D = \begin{bmatrix} S_2^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_3^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} [Q_1^{(0)} + Q_2^{(0)}] & 1 \\ -\frac{1}{2} [Q_2^{(0)} + Q_3^{(0)}] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2} [Q_{n-1}^{(0)} + Q_n^{(0)}] & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Y = \{Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}, \cdots, Q_n^{(1)}\}^T,$$

解微分方程(1) 可得

$$\hat{Q}_{n+1} = \left[Q_1^{(1)} - \frac{b}{a} \right] \exp \{ -a [S_{n+1}^{(0)} - S_1^{(0)}] \} + \frac{b}{a}, \tag{2}$$

$$\hat{S}_{n+1}^0 = S_1^0 - \frac{1}{a} \ln \left[\frac{Q_{n+1}^0 - \frac{b}{a}}{Q_1^0 - \frac{b}{a}} \right]. \tag{3}$$

上式中 \hat{Q}_{n+1} 为第 $n+1$ 级静荷载试验桩顶荷载预测值, \hat{S}_{n+1}^0 为第 $n+1$ 级静荷载试验桩顶位移预测值. (2)、(3) 式即为 $Q-S$ 曲线的灰色模型公式,由此得最终非等步长 GM(1,1) 的单桩极限承载力为

$$Q_{uk} = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

1.2 灰色预测 GM(1,1) 模型群

采用原始序列的荷载和沉降序列建立的 GM(1,1) 模型为全数据 GM(1,1) 模型. 由于灰色系统在建模过程中会有一些不可避免的因素进入系统,从而影响预测的准确性,因此必须考虑随时间的推移引入的新信息,同时剔除旧信息.

假设 $Q_{n+1}^{(0)}$ 为最新数据,将 $Q_{n+1}^{(0)}$ 置入 $Q_i^{(0)}$ 数列,得新数列 $\{Q_i^{(0)}, i=1,2,\cdots,n+1\}$, 建立的 GM(1,1) 模型为新信息 GM(1,1) 模型. 将 $Q_{n+1}^{(0)}$ 置入 $Q_i^{(0)}$ 数列,剔除旧信息 $Q_1^{(0)}$ 后得新数列 $\{Q_i^{(0)}, i=2,\cdots,n+1\}$, 建立的 GM(1,1) 模型为新陈代谢信息 GM(1,1) 模型.

2 灰色预测模型的精度检验

当预测(拟合) 不能满足精度要求时,在原有 GM(1,1) 模型下建立残差序列,然后对残差序列进行灰预测,即最终预测由 GM(1,1) 和残差 GM(1,1) 两部分组成. 本文通过后验差比值建立高精度的 GM(1,1) 灰色预测模型,即带残差的非等步长 GM(1,1) 单桩极限承载力预测模型. 残差 $q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - \hat{Q}_i^{(0)}, i = 1, 2, \cdots, n$, 由此计算得残差均值 $\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i^{(1)}$, 残差方差 $R_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (q_i - \bar{q})^2$, 荷载均差 $\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i^{(0)}$, 荷载方差 $R_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q_i^{(0)} - \bar{Q})^2$, 后验差比值 $C = \frac{R_1}{R_2}$, 小误差概率 $T = \{ |q^{(1)}(i) - \bar{q}| < 0.6745R_1 \}$.

预测模型的精度可根据 C 和 T 两个指标综合评定. 指标 C 越小,表明虽然原始数据较为离散,而模型所得计算值与实际值之差并不大;指标 T 越大,表明残差与残差平均值之差小于给定值 $0.6745R_1$ 的点较多,即拟合值(预测值) 分布比较均匀. 将模型的精度分为 4 个等级,如表 1 所示. 如果不合格,则根据上述后验差比值计算公式 ($C = \frac{R_1}{R_2}$), 建立残差 GM(1,1) 模型,然后将残差的预测值加到原来的预测值上.

表 1 预测精度表

预测等级	小误差概率	后验差
好	$P > 0.95$	$C < 0.35$
合格	$0.95 \geq P > 0.8$	$0.35 \leq C < 0.5$
勉强	$0.8 \geq P > 0.7$	$0.5 \leq C < 0.65$
不合格	$P \leq 0.7$	$C \geq 0.65$

3 Usher 曲线模型预测

Usher 曲线^[4] 是用来描述增长信息随时间变化的数学模型(S 型曲线),近年来被逐步推广应用于土建领域的预测模型中. Usher 曲线的微分方程:

$$\frac{dy}{ydt} = \frac{a}{b} \left[1 - \left(\frac{y}{y_m} \right)^b \right],$$

(5)

式中 y 为模型函数, a 为增长速度因子, b 为形状因子, y_m 为极限值. 由于桩的荷载-沉降关系也属于增长类曲线,故可设桩顶荷载 Q 为因变量,桩顶沉降 S 看作为广义时间, Q_u 作为 y 的极限值,由此可得 $Q = \frac{Q_u}{(1 + ce^{-as})^{\frac{1}{b}}}$, 式中 a、b、c、 Q_u 为模型参数,可根据桩的静载荷试验数据,通过拟合的方法确定.

4 工程实例分析

试验桩数量在同一条件下少于 3 根,且不少于总桩数的 1%^[9]. 本文采用文献[7] 的试验桩荷载值与沉降值,PHC 管桩的桩长为 14 m,桩径为 400 mm. 试验建筑 IV 区 1 号楼 S1 桩端持力层为中砂层, f_{si} 为 300 kPa, IV 区 2 号楼 S1 桩端持力层为粉细砂层, f_{si} 为 250 kPa. 根据工程实践,单纯求桩的极限承载力没有实际意义. 按照《建筑地基基础设计规范》(GB 50007—2011) 规定, Q-S 曲线呈缓变型时,桩顶总沉降量 $s = 40$ mm 所对应的荷载值为单桩竖向极限荷载值.

表 2 PHC 管桩静载荷资料

级数	1 # S1		2 # S1	
	Q/kN	S/mm	Q/kN	S/mm
1	560	0.97	560	1.7
2	840	2.02	840	2.82
3	1 120	2.96	1 120	4.18
4	1 400	4.00	1 400	5.62
5	1 680	6.03	1 680	7.12
6	1 960	8.27	1 960	8.91
7	2 240	11.02	2 240	10.8
8	2 520	13.99	2 520	13.24
9	2 800	17.25	2 800	16.19

PHC 管桩静载荷与沉降值^[7],如表 2 所示.

1) 灰色理论全信息模型以 2#S1 桩为例(其余模型相似),MATLAB 软件计算程序如下:

```
Clear all
S=[1.12    0    0    0    0    0    0    0
    0    1.36    0    0    0    0    0    0
    0    0    1.44    0    0    0    0    0
    0    0    0    1.5    0    0    0    0
    0    0    0    0    1.79    0    0    0
    0    0    0    0    0    1.89    0    0
    0    0    0    0    0    0    2.44    0
    0    0    0    0    0    0    0    2.95], Q=[-700    1
    -980    1
    -1260    1
    -1540    1
    -1820    1
    -2100    1
    -2390    1
    -2660    1],
d=S*Q
e=inv(d'*d)*d'*Y
```

计算结果 $e=(a,b)=(0.073\ 4,291.66)$.

2) Usher 模型采用 MATLAB 拟合工具箱进行拟合,以 2#S1 桩为例,运算如下:

```
Clear all
X=[1.7,2.82,4.18,5.62,7.12,8.91,10.8,13.24,6.19]
Y=[560,840,1120,1400,1680,1960,2240,2520,2800]
:
填入自定义函数
y=Q/(1+c*exp(-a*x))^(1/b)
```

附初值及范围,并以此类推,得出计算结果.

运用公式(1)和公式(5),建立 1、2 号楼 S1 桩的全数据 GM(1,1)模型和 Usher 模型,并通过 MATLAB 2010 软件进行计算,同时采用软件中的拟合工具箱进行拟合,最后根据后验差比值、小误差概率验证预测模型是否满足工程要求.

1#S1 桩和 2#S1 桩的 3 种灰色模型比较见表 3,由 1#S1 桩和 2#S1 桩 Usher 曲线模型得出的预测值、实测值、计算值见表 4.

表 3 1#S1 桩和 2#S1 桩的 3 种灰色模型比较

	模型类别	$a/$ (1/mm)	$b/$ (kN/mm)	预测值/ kN	实测值/ kN	计算值/ kN	相对误差/ %	后验差/ %	小误差 概率	实测值/ 计算值
1#S1	全数据	0.087 4	302.65	3 367	3 177.5	2 467.3	5.96	7.6	1	1.29
	新信息	0.091 6	310.12	3 386	3 177.5	2 467.3	6.56	7.2	1	1.29
	新陈代谢	0.088 1	301.61	3 332	3 177.5	2 467.3	4.86	7.3	1	1.29
2#S1	全数据	0.073 4	291.66	3 768.3	3 253	2 464.4	15.84	1.26	1	1.32
	新信息	0.074 2	292.98	3 760.3	3 253	2 464.4	15.59	1.36	1	1.32
	新陈代谢	0.072 8	289.50	3 767.2	3 253	2 464.4	15.81	1.89	1	1.32

注:小误差概率只针对最后三级荷载的预测值.

表 4 1#S1 桩和 2#S1 桩 Usher 曲线模型的预测值、实测值和计算值

	a	b	c	Q_0 /kN	预测值/ kN	实测值/ kN	计算值 /kN	相对误差/ %	实测值/ 计算值
1#S1	0.160 2	8.96E-05	1.499E-04	3 037	3 029	3 177.5	2 467.3	-4.67	1.29
2#S1	0.173 9	7.47E-05	1.648E-04	3 165	3 158	3 253	2 464.4	-2.92	1.32

由表 3 和表 4 可知(3 种灰色模型预测下):1# S1 桩的极限承载力的预测相对误差未超过 7%, 2# S1 桩的极限承载力的预测相对误差为 15%, 根据后三级预测数据后验差比值 C 和小误差概率 T 以及表 1 得出, 二者的预测精度等级均为好. 这说明近距离预测极限承载力的精度较高, 而远距离则有一定的误差.

由表 4 可知(Usher 曲线模型预测下):2# S1 桩相对误差未超过 -3%, 1# S1 桩的相对误差未超过 -5%, 这表明 Usher 曲线模型的预测精度较高.

从图 1 和图 2 可知, 由实测 Q-S 值为数据序列建立的 3 种灰色预测 GM(1,1)模型和 Usher 模型得到的单桩承载力预测值与单桩承载力实测值相吻合. 从预测模型对数据的后验差和小误差概率可看出, 预测模型对原始数据后 3 级的预测精度非常高.

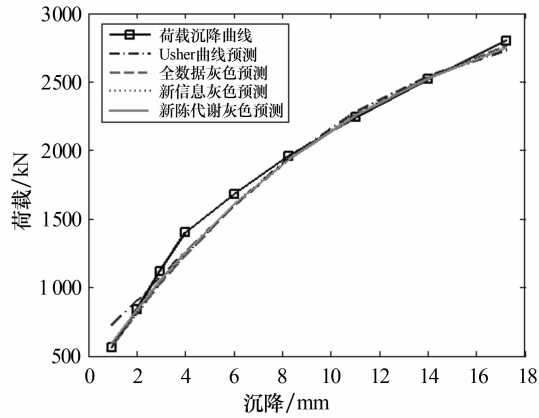


图 1 1# S1 桩各预测模型图像

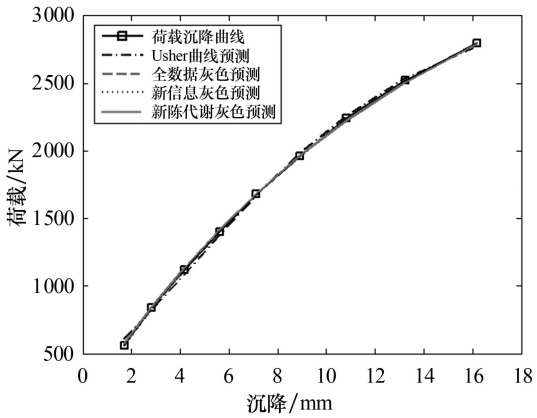


图 2 2# S1 桩各预测模型图像

5 结论

本文的工程实例表明:采用非等步长 GM(1,1)模型预测 PHC 管桩单桩极限承载力虽然拟合精度较高,但相对误差较大,说明预测精度与竖向静载试验数据级数选取、预测距离等有密切关系;Usher 模型对 PHC 管桩单桩极限承载力的预测效果优于灰色理论模型,特别是在曲线的尾部,桩顶极限荷载预测值与实测值的相对误差为 3.8%(绝对平均值),由此可判定 Usher 模型具有较高的精度. 本文结论可为类似工程地质条件下的 PHC 管桩单桩竖向极限承载力的预测提供借鉴,当地质条件不同时,建议采用上述 3 种灰色模型和 Usher 模型分别进行预测,然后取加权平均值,这样预测值会更接近于实测值.

参考文献:

[1] 张明义. 静力压入桩的研究与应用[M]. 北京:中国建材工业出版社,2004:10-12.
[2] 张正恩. 高强度预应力混凝土管桩承载力研究[D]. 郑州:河南工业大学,2011:9-10.
[3] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002:111-140.
[4] 蒋建平. 桩极限承载力的 Usher 模型预测[J]. 江苏大学学报,2009,30(5):528-532.
[5] 邵朋. 基于遗传算法的 PHC 管桩竖向极限承载力预测研究[D]. 天津:天津大学建筑工程学院,2011:51-54.
[6] 罗建阳. 基于灰色系统理论单桩竖向极限承载力的预测[J]. 南华大学学报,2011,6:95-99.
[7] 涂涛. 预应力混凝土管桩承载性能的研究[D]. 西安:长安大学,2009,11:26-34.
[8] 许旭堂. 静压 PHC 管桩单桩竖向极限承载力预测研究[D]. 福州:福建农林大学,2012,4:19-20.
[9] 中华人民共和国建设部、国家质量监督检验检疫总局. GB 50007—2011 建筑地基基础设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2011:159-161.